

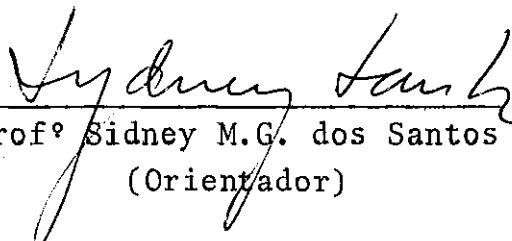
ESTUDO DE PLACAS E CHAPAS RETANGULARES

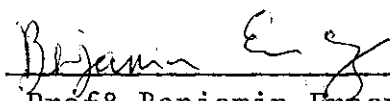
COM ORIFÍCIOS


JOSÉ RAIMUNDO SERRA PACHA

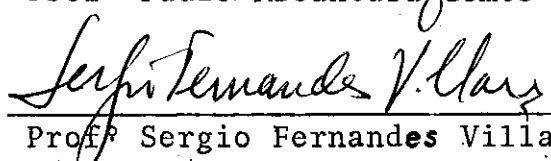
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE MESTRE EM CIÊNCIAS(M.Sc.).

Aprovada por:


Profº Sidney M.G. dos Santos
(Orientador)


Profº Benjamin Ernani Diaz


Profº Paulo Alcantara Gomes


Profº Sergio Fernandes Villaça

RIO DE JANEIRO

ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL

MAIO DE 1982

à memória de meus avós, a
meus pais e meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Sidney M.G. dos Santos, pela orientação e estí
mulo dados a este trabalho.

Ao Corpo Docente da COPPE, pelo apoio e incentivo aos
cursos de Pós-Graduação.

À U.F.P^a e CAPES (PICD), pela generosidade e auxílio fi
nanceiro recebido.

À Direção e Departamento de Engenharia Civil do Centro
de Tecnologia da U.F.P^a, pela indicação e apoio aos cursos de
Pós-Graduação.

Aos componentes do Núcleo de Computação Eletrônica pela
sua colaboração.

A todos os colegas e funcionários da COPPE que, direta
ou indiretamente, contribuíram para o êxito deste trabalho.

A Celeste Marinha pelos seus trabalhos datilográficos.

Ao Gilmar pelos desenhos e gráficos.

SINOPSE

O presente trabalho tem como objetivo o estudo da flexão de placas delgadas e do problema da conexão múltipla nas chapas; mais especificamente nos casos particulares de:

- 1) Placas retangulares delgadas, de espessura constante, engastadas e simplesmente apoiadas nos bordos externos, com um orifício central e sujeitas a carregamento transversal uniformemente distribuído.
- 2) Placa retangular delgada, de espessura constante, engastada em dois bordos adjacentes e livre nos outros dois, submetida a carregamento linearmente distribuído.
- 3) Chapa retangular delgada de espessura constante, (com um orifício central), sujeita a carregamento simétrico parcialmente distribuído nos bordos superior e inferior.

Inicialmente estabelecem-se as equações necessárias à resolução dos problemas, através de Diferenças Finitas em coordenadas cartesianas retangulares; comparam-se os resultados com os obtidos pelo Método dos Elementos Finitos², através do sistema Lorane Linear. No caso da placa caracterizada no item "2" acima, comparam-se também com os verificados experimentalmente e citados na literatura especializada³.

Na análise das placas foi aplicado o elemento finito re

tangular não conforme, com quatro nós e doze deslocamentos nodais.

Para a chapa foi utilizado o elemento finito triangular do segundo grau, com seis nós, possuindo doze deslocamentos nodais.

O Método das Diferenças Finitas apresentou bons resultados, especialmente para a placa com o contorno externo engastado e livre, de acordo com a investigação experimental citada.

SINOPSIS

The present subject has as an object to study the bending of thin plates and the problem of multiple connection in slabs , that is explained in the particular case such as:

- 1) Thin rectangular plates of constant thickness clamped and simply supported at the external edges, with a central hole and with a transversal loading distributed uniformly .
- 2) Thin rectangular plates of constant tickness clamped at two adjacent edges and free on your others, submitted to a loading distributed linearly :
- 3) Thin rectangular slab of constant thickness, double connected (with a central hole) exposed to a symmetrical loading partially distributed at the superior and lowes edges.

Inicially we have to stablish the equations to the resolution of the problem, through the Finite Differences in Cartesian rectangular coordinate; the results were compared with those which were obtained through the Finite Element Method² with he of the Lorane Linear System. In the case mentioned in item 2 above, we compared with results obtained experimentally which were treated in the specialized literature³.

For the plate analysis was applied a non conformed rectangular finite element presenting four nodes and twelve nodals displacements.

For the slab was used a finite triangular element of second degree, with six nodes having twelve nodals displacements.

The Finite Difference Method showed good results specially for the plate which had an external edge clamped and free conformed to the experimental investigation mentioned.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO I: ESTABELECIMENTO DAS EQUAÇÕES DA TEORIA DAS PLACAS DELGADAS NO SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS RE TANGULARES.....	5
1. Flexão de Placas Delgadas Carregadas Transversalmente.....	5
1.1. Relações entre deslocamentos, deformações e tensões...	6
1.2. Expressões dos momentos fletores e de torção por un _i dade de comprimento.....	10
1.3. Equação diferencial da teoria das placas delgadas.....	13
1.4. Expressões dos cortantes e reações de apoio por un _i dade de comprimento para contorno retilíneo apoiado (simplesmente ou engastado).....	18
1.5. Condições de contorno. Estudo especial do bordo li vre e do canto livre.....	21
CAPÍTULO II: RELAÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DAS CHAPAS. O PROBLEMA DA CONEXÃO MÚLTIPLA.....	27
2. Chapas Retangulares Multiplamente Conexas.....	27
2.1. Tipos de regiões. Ordem de conexão.....	27
2.2. Estado plano de tensões. Expressões fundamentais.....	30
2.3. Função de tensões ou função de Airy. Equação bi - harmônica.....	31
2.4. Condições de contorno.....	34
2.5. Critérios de fixação das constantes de contorno.....	42

CAPÍTULO III: MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. COORDENADAS RE TANGULARES.....	54
3.1. Considerações gerais.....	54
3.2. Conceituação. Diferenças finitas ordinárias.....	54
3.3. Diferenças finitas parciais.....	58
3.4. Operadores dispostos em moléculas.....	64
CAPÍTULO IV: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	68
4.1. Considerações gerais.....	68
4.2. Conceituação. Elementos utilizados. Hipótese.....	68
4.3. Critérios de convergência.....	71
CAPÍTULO V: RESOLUÇÃO NUMÉRICA.....	73
5.1. Fixação das condições de contorno por diferenças finitas.....	73
5.1.1. Placas. Condições de contorno.....	73
5.1.2. Chapas. Condições de contorno.....	75
5.2. Montagem das equações lineares. Aplicação dos operadores dispostos em moléculas.....	84
5.2.1. Placas.....	84
5.2.2. Chapas.....	88
5.3. Resolução do sistema global.....	89
5.4. Operadores para cálculo dos esforços nas placas e tensões nas chapas.....	90
5.4.1. Placas.....	90
5.4.2. Chapas.....	92

CAPÍTULO VI: ANÁLISE DOS RESULTADOS. TABELAS, GRÁFICOS, CON	
CLUSÕES E SUGESTÕES.....	94
6.1. Estruturas analisadas.....	94
6.2. Considerações gerais. Resultados.....	101
6.3. Análise e conclusão.....	142
6.4. Aplicabilidade do método das diferenças finitas...	160
6.5. Sugestões e continuidade da pesquisa.....	162
APÊNDICE.....	164
a - Notações utilizadas no desenvolvimento teórico.....	164
b - Convenções adotadas.....	168
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	170

INTRODUÇÃO

Dos problemas surgidos em cálculo estrutural, só os mais simples e os casos mais particulares tem suas soluções analíticas completas e totalmente dissecadas. Devido a esta dificuldade, é sempre válido tentarmos elaborar novos métodos numéricos, ou removermos obstáculos enfrentados pelos métodos já existentes com o intuito de conseguirmos soluções aproximadas para certos problemas. A curiosidade de sabermos as causas do lento progresso do Método das Diferenças Finitas e o objetivo de darmos uma modesta contribuição ao seu desenvolvimento na análise de problemas pouco abordados, deram origem a este trabalho.

Com o advento da era eletrônica a ciência teve notável progresso em todos os seus ramos.

Em particular, a teoria das estruturas sofreu profundas modificações, fornecendo ao engenheiro calculista ferramentas necessárias para resolver os inúmeros problemas idealizados pela grande criatividade da arquitetura moderna.

Os métodos numéricos encontravam-se outrora limitados. Além de serem trabalhosos, principalmente no que se refere à resolução de grandes sistemas de equações, era necessária a introdução de hipóteses simplificadoras no cálculo, ocorrendo incerteza na precisão de resultados. Eles renasceram e ampliaram-se e hoje

representam a mola mestra do cálculo estrutural.

O método numérico que inicialmente foi aplicado com grandes sucessos, em estruturas de uso corrente em engenharia foi o das "Diferenças Finitas". Embora adequado para problemas relativamente particulares, falhava para os mais complexos, o que deixava uma grande lacuna a ser preenchida.

Os pesquisadores procuraram desenvolver um outro, de cunho mais geral, sob todos os aspectos. Surgiu assim o método dos elementos Finitos que constitui o processo de discretização mais poderoso da teoria das estruturas. Este, cada vez mais vai se firmando à medida que é utilizado pela apresentação de excelentes resultados, quando comparado com outros já conhecidos. Sendo um método relativamente novo, é natural que se ressinta da falta de dados quantitativos, no que se refere a sua aplicação a diferentes tipos de problemas reais. Torna-se portanto relevante qualquer comparação deste, com outros de reconhecida precisão.

Baseado nisto, fazemos neste trabalho um estudo comparativo dos métodos numéricos das Diferenças Finitas e dos Elementos Finitos, para alguns problemas tais como:

1. Flexão de placas retangulares com orifícios.
2. Flexão de placas retangulares com bordos e canto livre .
3. Estado plano de tensões no caso de chapas multiplamente conexas.

Esses problemas envolvem a solução de uma equação diferencial parcial de quarta ordem, que nem sempre tem solução exata.

Pode-se afirmar, com base em ponderações seguras que a solução formal desses problemas só é possível em casos isolados.

Como decorrência natural da afirmativa acima ter-se-a que lançar mão de métodos numéricos, que nos levarão a soluções aproximadas.

Estes acarretam, por sua natureza, um grande esforço de cálculo e, em consequência, uma grande probabilidade de erro.

A utilização do computador se torna imprescindível, mormente se desejamos ter soluções mais próximas da real. É preciso que se diga que nem sempre é fácil programar determinado método e, muitas vezes, quase impossível automatizá-lo totalmente.

As novas concepções arquitetônicas exigem do engenheiro soluções não usuais, bem como uma crescente necessidade de dominar razoavelmente as técnicas de computação. Um dos métodos numéricos mais utilizados na solução de problemas de flexão de placas e de elasticidade plana é o das Diferenças Finitas. Mesmo assim, apresenta este método, certas interrogações quando aplicado a certos casos ainda pouco estudados.

A falta de pesquisa neste campo, talvez se explique pelo grande volume de cálculo exigido e pelo surgimento de novos métodos, totalmente programados através de computadores.

Como se não bastassem as dificuldades já enumeradas, surgem ainda outras tais como: condições de contorno; necessidade de valores fictícios, externos à placa; a inexistência de um elemento de malha que se adapte a qualquer problema; grande complexidade quando se utilizam malhas irregulares e que nem sempre o sistema de equações lineares obtido é bem condicionado.

O estudo de alguns problemas específicos na flexão de placas delgadas; bem como o da conexão múltipla nas chapas do qual resultam as interrogações já mencionadas e a tentativa de levantá-las, assim como a comparação entre o Método das Diferenças Finitas e dos Elementos Finitos, já referida pontificaram como fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

O estudo teórico pode-se resumir da seguinte maneira:

- a) Fórmulas para o estudo de tensões no sistema de coordenadas retangulares na apresentação da flexão de placas delgadas e do problema de estado plano de tensões nas chapas
- b) Fundamentos teóricos e aplicação dos métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos a um mesmo problema.
- c) Apresentação dos resultados com tabelas, gráficos, conclusões e sugestões.

CAPÍTULO I - ESTABELECIMENTO DAS EQUAÇÕES DA TEORIA DAS PLACAS DELGADAS NO SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS RECTANGULARES.

Neste capítulo estabelecemos de forma bem resumida as relações básicas da teoria das placas delgadas de que necessitamos ao longo dos capítulos seguintes.

1. Flexão de Placas Delgadas:

Inicialmente consideremos um elemento infinitesimal de uma placa, cujo plano médio esteja situado no plano xOy conforme ilustra a figura (I-1).

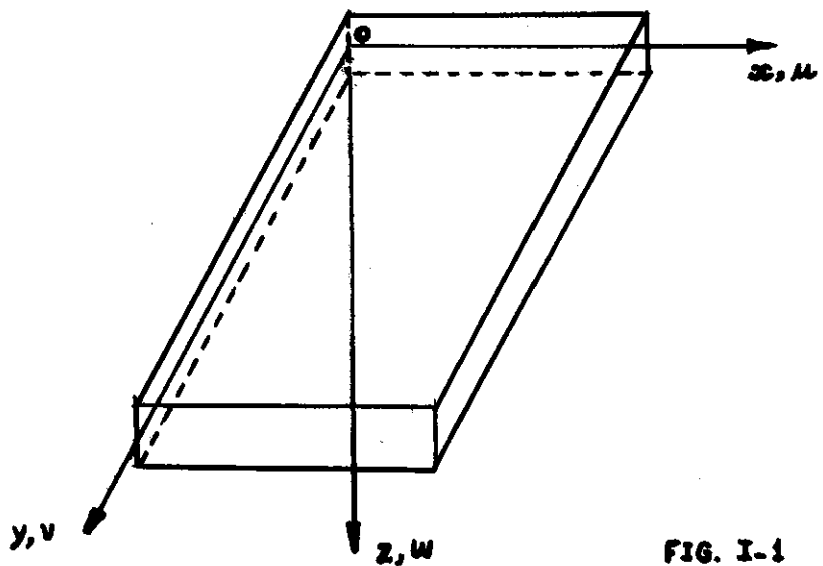


FIG. I-1

1.1. Relações entre deslocamentos, deformações e tensões:

Se dermos um corte através do plano xOz , e analisarmos a porção da placa antes e depois de sofrer deformações, teremos a situação da figura (I-2).

Tendo em vista as hipóteses simplificadoras do estudo das placas delgadas, relacionemos os deslocamentos \underline{u} e \underline{w} de um ponto da placa.

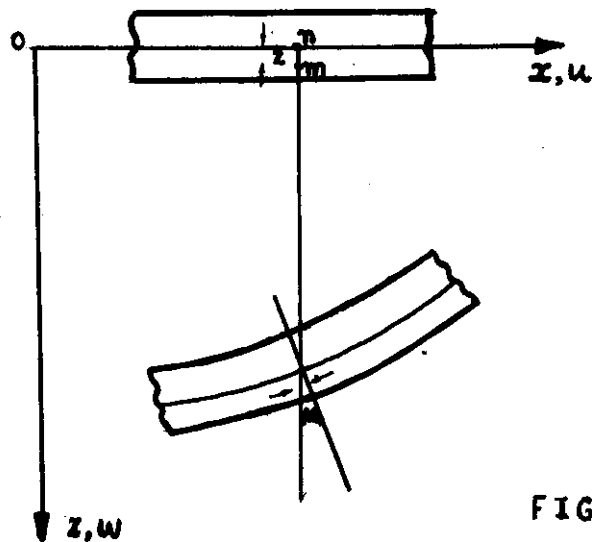


FIG. I-2

Para isso observemos a figura (I-3), que mostra a porção da placa depois de deformada, de uma forma mais detalhada.

Após a deformação o ponto n virá para n_1 e m para m_1 ; a normal $\overline{m_1 n_1}$ passará a formar um ângulo θ com a posição inicial \overline{mn} .

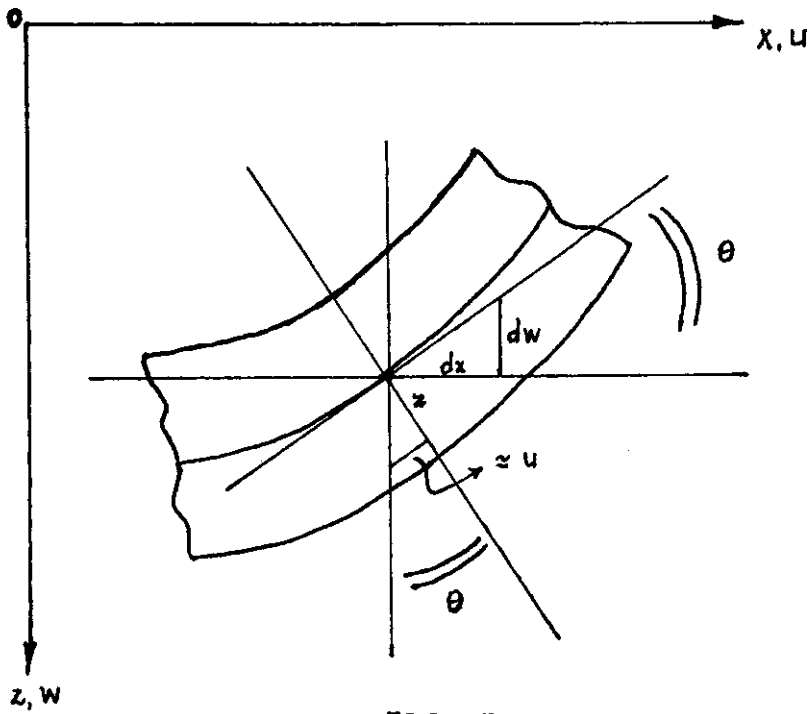


FIG. I-3

Escrevamos, então, baseados na referida figura:

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

Eq. (I.1)

A seguir, citemos a relação entre os deslocamentos \underline{v} e \underline{w} , obtida de forma inteiramente análoga:

$$v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

Eq. (I.2)

Consideremos, agora, as relações por nós conhecidas entre deformações e deslocamentos.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Eq. (I-3)

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Eq. (I-4)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Eq. (I-5)

Derivando as equações (I-1) e (I-2) em relação a x e y respectivamente e posteriormente em relação a y e x e tendo em vista as equações (I-3), (I-4) e (I-5), obteremos as relações entre as deformações e o deslocamento transversal w :

$$\epsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Eq. (I-6)

$$\epsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Eq. (I-7)

$$\gamma_{xy} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Eq. (I-8)

Pela lei de Hooke, cujas expressões, explicitadas as tensões, resultarão nas equações a seguir:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_y) \quad \text{Eq. (I-9)}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\epsilon_y + \nu \cdot \epsilon_x) \quad \text{Eq. (I-10)}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{xy} \quad \text{Eq. (I-11)}$$

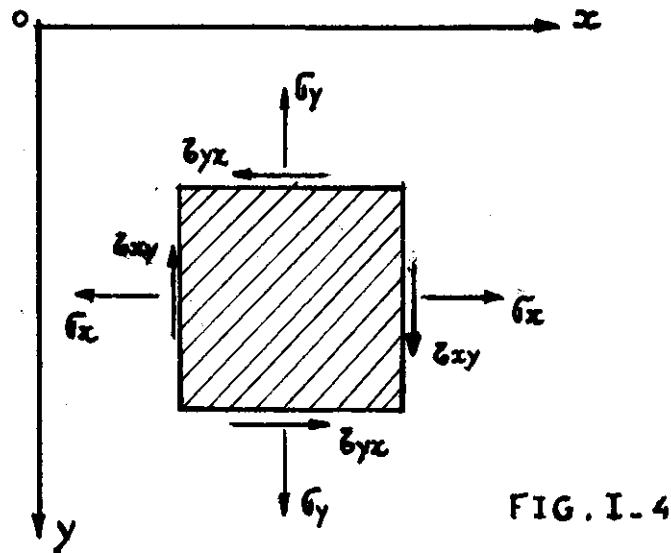
Estas igualdades transformam-se, levando em conta as equações (I-6), (I-7) e (I-8), para obtermos finalmente as relações entre as tensões e o deslocamento transversal w.

$$\sigma_x = - \frac{E \cdot z}{1 - \nu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{Eq. (I-12)}$$

$$\sigma_y = - \frac{E \cdot z}{1 - \nu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{Eq. (I-13)}$$

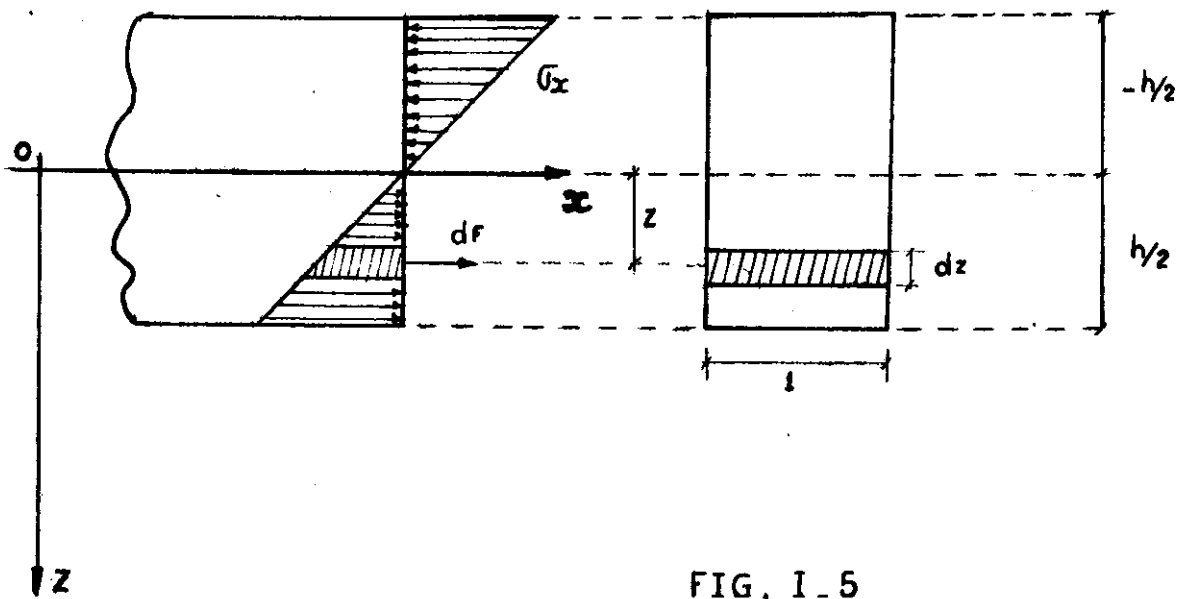
$$\tau_{xy} = - \frac{E \cdot z}{1 - \nu^2} \cdot (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{Eq. (I-14)}$$

Observemos na figura (I-4) o sentido positivo que adotaremos para as tensões no decorrer deste trabalho.



1.2. Expressões dos momentos fletores e de torção por unidade de comprimento:

As expressões dos momentos fletores e de torção serão obtidas a partir da integração das tensões ao longo da espessura h da placa.



Para obtermos M_x temos; para uma largura unitária:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

Substituindo σ_x pela sua expressão dada na equação (I-12)

teremos:

$$M_x = - \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \left(- \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot dz$$

Após a integração em z :

$$M_x = - \frac{Eh^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left(- \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Façamos:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D \text{ (rigidez à flexão da placa)}$$

Finalmente chegamos a:

$$M_x = - D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{Eq. (I-15)}$$

Através de deduções inteiramente análogas chegaríamos às expressões de M_y e M_{xy} .

Portanto:

$$M_y = - D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{Eq. (I-16)}$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D (1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{Eq. (I-17)}$$

1.3. Equação diferencial das placas delgadas:

A seguir, observando a figura (I-6) onde estão representados o elemento infinitesimal de placa em equilíbrio, com os esforços atuantes e carregamento exterior, com seus sentidos positivos, escrevamos as equações de equilíbrio para este elemento.

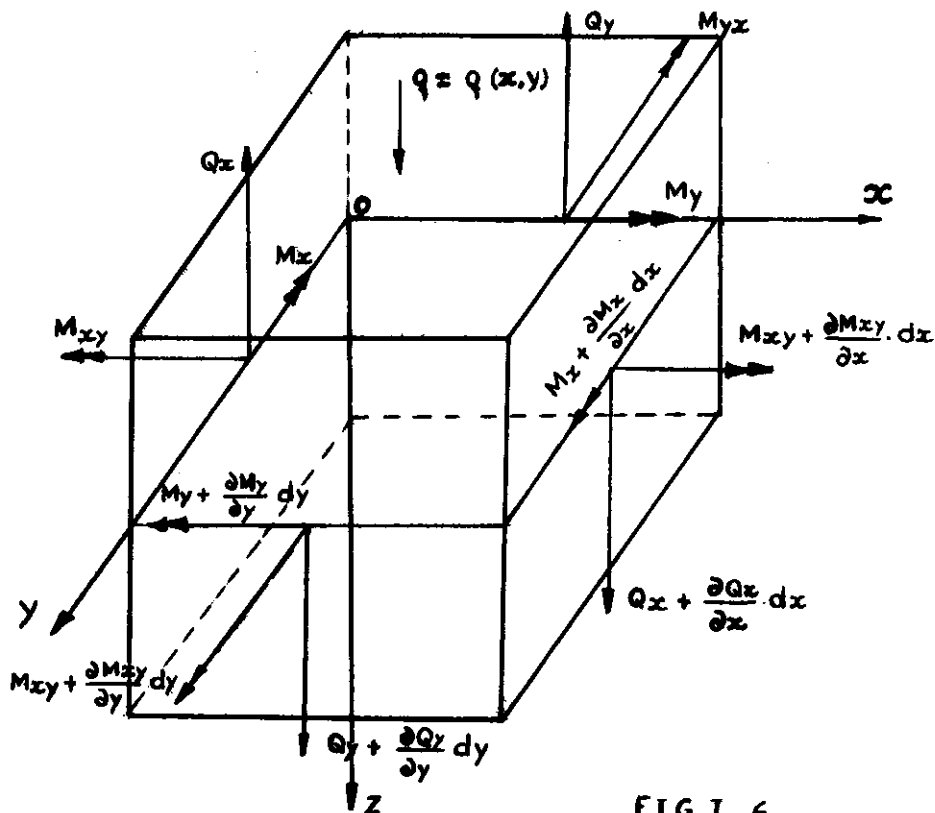


FIG. I. 6

Seja $q = q(x, y)$, a ordenada da superfície de carga, admitindo que essa superfície no contorno, não apresente nenhum ponto singular, "q" poderá ser suposto constante nessa área, com erro de ordem superior. Haverá três equações de equilíbrio (as três outras transformando-se em identidades) a saber:

a) Equilíbrio de momentos em relação a \vec{ox} :

$$(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \cdot dx) \cdot dy - M_{xy} \cdot dy + M_y \cdot dx -$$

$$- (M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} \cdot dy) \cdot dx + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \cdot dy) \cdot dx = 0$$

Simplificando e desprezando o infinitésimo de terceira ordem, vem:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad \text{Eq. (I-18)}$$

b) Do equilíbrio de momentos em relação a \vec{oy} ; resulta analogamente:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad \text{Eq. (I-19)}$$

c) Equilíbrio de forças na direção $\vec{o}\hat{z}$:

$$\begin{aligned} & (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot dx) \cdot dy - Q_x \cdot dy + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \cdot dy) \cdot dx - \\ & - Q_y \cdot dx + q \cdot dx \cdot dy = 0 \end{aligned}$$

simplificando:

$$\boxed{\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0}$$

Eq. (I-20)

Reunamos estas três equações de equilíbrio numa só equação. Para isso derivemos as equações (I-18) e (I-19) em relação a y e x respectivamente.

então:

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0$$

ou, explicitando as derivadas dos cortantes:

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y}$$

e

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x}$$

Substituindo estas duas expressões na equação (I-20), vem:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q$$

Introduzamos as expressões de M_x , M_y e M_{xy} em função do deslocamento transversal "w", dadas pelas equações (I-15), (I-16) e (I-17) para obtermos:

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}} \quad \text{Eq. (I-21)}$$

Esta equação, é a conhecida equação diferencial das plcas delgadas no sistema de coordenadas cartesianas retangulares, também dita equação de Lagrange.

Resolver uma placa é, portanto, resolver esta equação, respeitando as condições de contorno, determinando $w(x,y)$. A partir do conhecimento de "w" todos os elementos necessários ao cáluculo da placa podem ser encontrados.

Escrevamos a equação (I-21), simbolicamente, numa forma mais compacta:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w = \frac{q}{D}$$

É fácil verificar a identidade:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{aligned}$$

ou seja:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$$

De modo que a equação das placas pode apresentar-se na forma simbólica:

$$\boxed{\nabla^4 w = \frac{q}{D}}$$

Eq. (I-22)

1.4. Expressões dos cortantes e reações de apoio por unidade de comprimento para contorno retilíneo apoiado (simplesmente ou engastado).

Para obtermos as expressões dos cortantes, tomemos as equações (I-15), (I-16) e (I-17); derivemos a primeira (I-15) em relação a x, derivemos (I-17) em relação a y, levando estes resultados na equação (I-19) virá:

$$\boxed{Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)}$$

Eq. (I-23)

analogamente:

$$\boxed{Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)}$$

Eq. (I-24)

Para placas de contorno apoiado (simplesmente ou engastado), podemos preparar as fórmulas que fornecerão as reações desses apoios, para contorno retilíneo.

Seja AB, um bordo apoiado, que suporemos paralelo a Ox, Fig. (I-7). Num elemento dx, atuarão $Q_y \cdot dx$ e $M_{yx} \cdot dx$; podemos substituir $M_{yx} \cdot dx$, por duas forças de intensidade M_{yx} separadas pelo braço dx.

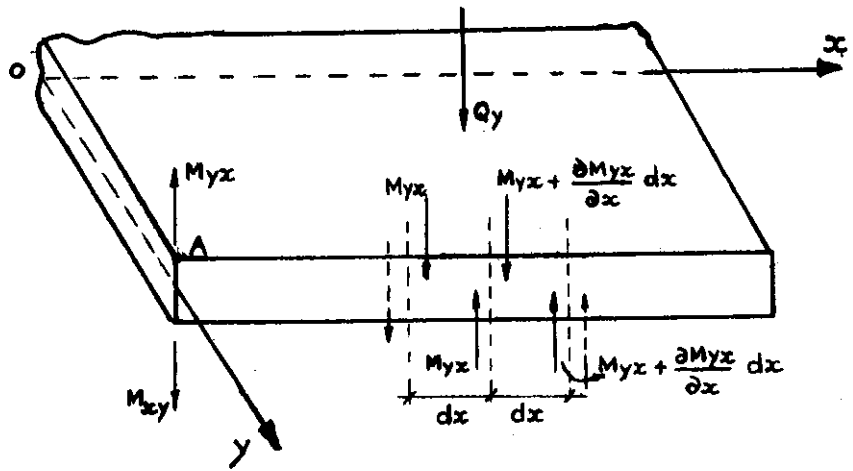


FIG. I-7

No segmento vizinho a dx , as forças já serão $(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \cdot dx)$ de modo que numa distância dx , restará a força:

$$(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \cdot dx) - M_{yx} = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \cdot dx$$

esta força por unidade de comprimento será $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$.

Nessas condições no ponto \underline{m} , haverá um cortante total, que será a própria reação de apoio por unidade de comprimento,

dada por:

$$\boxed{V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}}, \text{ analogamente: } \boxed{V_x = Q_x + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}}$$

Introduzindo as expressões de Q_y e M_{yx} dadas pelas equações (I-24) e (I-17), e notando que haveria uma análoga V_x , para um bordo paralelo a \vec{oy} ; podemos escrever:

$$\boxed{V_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)} \quad \text{Eq. (I-25)}$$

$$\boxed{V_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)} \quad \text{Eq. (I-26)}$$

Se a placa tiver canto, por exemplo o canto "A" na fig. (I-7), a força M_{yx} não será contrabalançada, e se o bordo for ortogonal, haverá outra força de mesma grandesa e direção, de modo que no canto haverá uma força concentrada igual a:

$$\boxed{R = 2M_{xy} = 2(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}} \quad \text{Eq. (I-27)}$$

1.5. Condições de contorno. Estudo especial do bordo livre e do canto livre.

a) Apoio Simples:

No caso de placas simplesmente apoiadas as condições de contorno a considerar são muito simples.

Seja \vec{n} a direção da normal a um bordo paralelo à direção \vec{t} , como ilustra a fig. (I-8) abaixo.

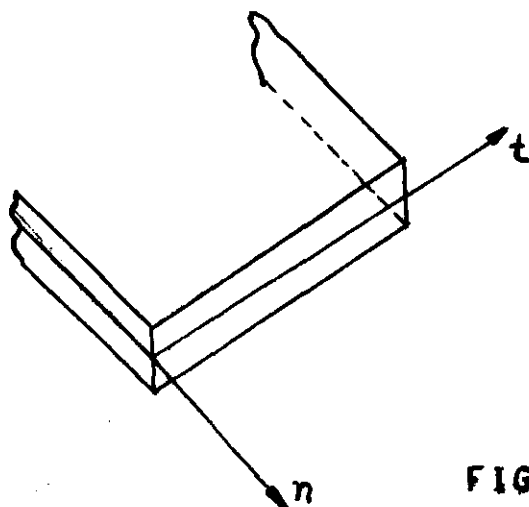


FIG. I-8

Neste caso, teremos ao longo deste bordo os deslocamentos transversais e momentos fletores nulos. Ou seja, no contorno, $w = 0$ e $M_n = 0$. Podemos também escrever:

$$w = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 ; \text{ como } w = \text{cte} = 0 \text{ sobre o bordo,}$$

a curvatura é nula nesta direção ; portanto $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$ e a con

dição $M_n = 0$, resulta: $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$.

Então para um bordo simplesmente apoiado as condições de contorno serão:

$$w = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

b) Engaste

Neste caso a primeira condição será $w = 0$. Num bordo pa
ralelo a \vec{t} , devemos ter $\frac{\partial w}{\partial n} = \text{cte} = 0$, pela própria definição
de engaste. Resulta daí que $\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = 0$; expressão que também é
válida para um bordo engastado. Então as condições que caracteriz
am um bordo engastado serão:

$$W = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = 0$$

c) Bordo Livre.

Se um bordo de uma placa fig. (I-9) é inteiramente li-
vre, é natural assumirmos que ao longo do mesmo não existam os
momentos fletores e torçores e também o esforço cortante, isto é:

$$M_n = 0, \quad M_{nt} = 0 \quad \text{e} \quad Q_n = 0$$

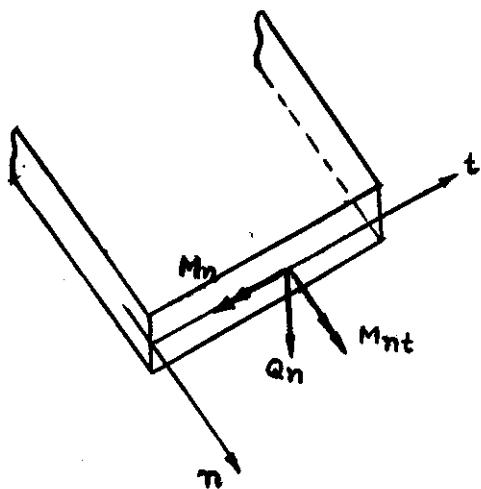
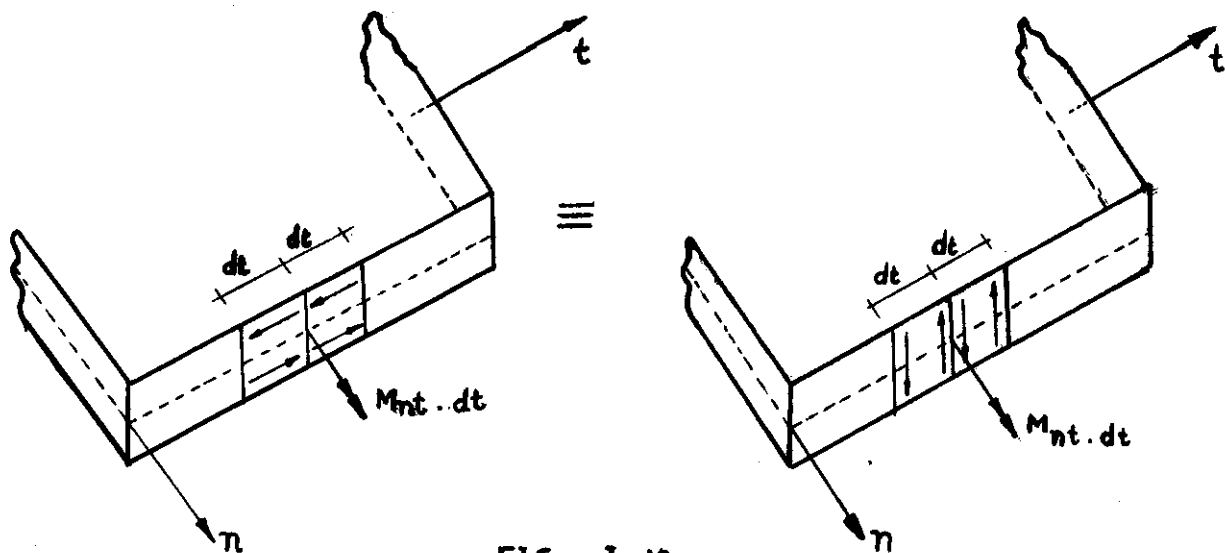


FIG. I-9

Essas condições de contorno para um bordo livre foram expressas por Poisson nesta forma. Porém posteriormente, Kirchhoff, provou que apenas duas condições eram suficientes para a completa determinação das deflexões satisfazendo a equação (I-22).

Mostremos as condições impostas por Kirchhoff para um bordo livre. Seja o bordo paralelo a direção \vec{t} , inteiramente livre; Kirchhoff mostrou que as condições de bordo em termos do momento torçor e do cortante, combinam-se numa única condição.

Para isso, substituem-se as forças horizontais, cujo momento resultante é $M_{nt}.dt$, por duas outras forças verticais de intensidade M_{nt} distantes dt , figs. (I-10); que tornam o sistema estaticamente equivalente, não alterando as grandezas dos momentos torçores e produzindo somente alterações locais na distribuição de tensões no bordo da placa.



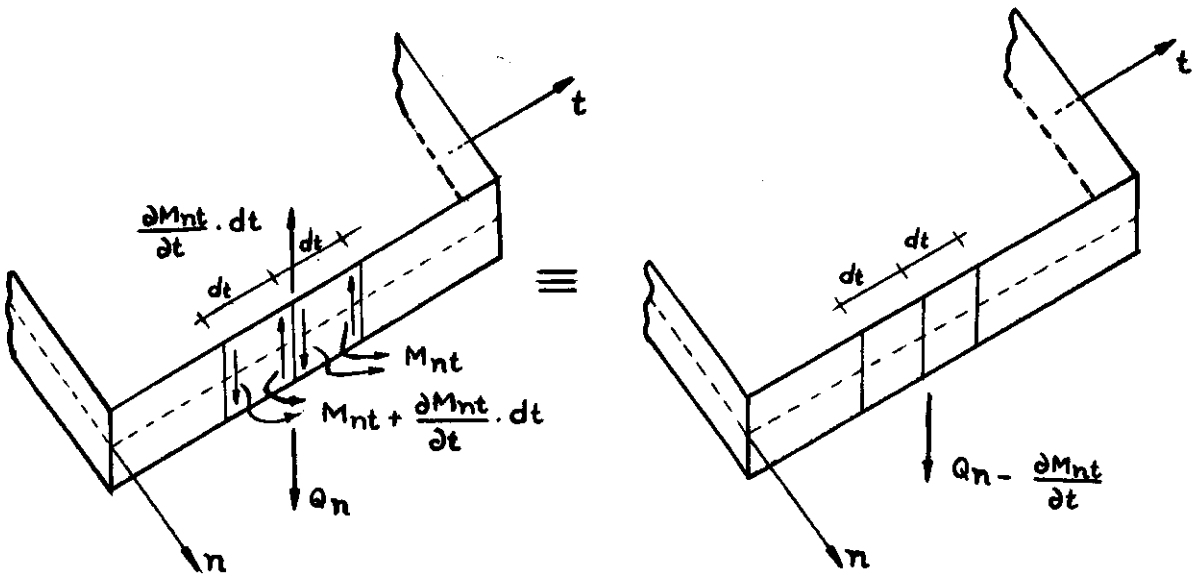
FIGs. I-10

Considerando dois elementos adjacentes do bordo, teremos, como se vê nas figs. (I-11); uma força resultante vertical igual a $\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \cdot d_t$, que por unidade de comprimento será

$\frac{\partial M_{nt}}{\partial t}$. Então a força vertical total no bordo, por unidade de

comprimento vale:

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial t}$$



FIGs. I-11

$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial t}$, é a força vertical resultante total no bordo por unidade de comprimento.

Portanto as condições de bordo livre ficam:

$$M_n = 0$$

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = 0$$

Substituindo M_n , Q_n e M_{nt} por suas expressões em função dos deslocamentos transversais W , podemos também escrever:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial n^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial n \partial t^2} = 0 \quad ; \text{ condições do contorno do bordo livre.}$$

Se uma placa tiver um canto livre fig. (I-12); as condições de contorno para o canto "A" ortogonal e inteiramente livre serão expressas por:

$$M_n = M_t = 0, \quad V_n = 0, \quad V_t = 0 \text{ e } R = 2M_{nt} = 0 \quad \text{ou};$$

$$M_n = M_t = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$V_n = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2} \right] = 0$$

$$V_t = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial n^2} \right] = 0$$

$$R = 2M_{nt} = 2.D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = 0$$

portanto para um canto livre ortogonal às condições serão:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial n^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = 0$$

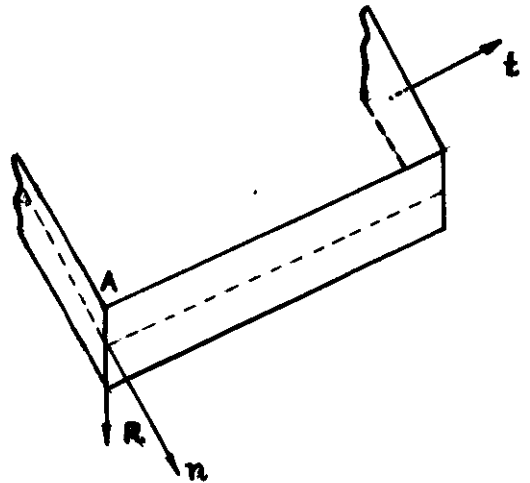


FIG. I - 12

CAPÍTULO II - RELAÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DAS CHAPAS. O PROBLEMA DA CONEXÃO MÚLTIPLA.

2. Chapas Multiplamente Conexas.

O problema dos domínios multiplamente conexos em elasticidade plana, apresenta maiores dificuldades do que no caso, da conexão simples; salvo a região anular, de fácil tratamento por coincidirem seus contornos, via de regra com valores fixos do sistema polar de coordenadas.

É o problema plano de tensões nas regiões com um número qualquer de contornos internos que pretendemos apresentar neste capítulo.

2.1. Tipos de regiões.

Seja "S" uma região limitada por uma curva fechada C sem pontos múltiplos, fig.(II-1).

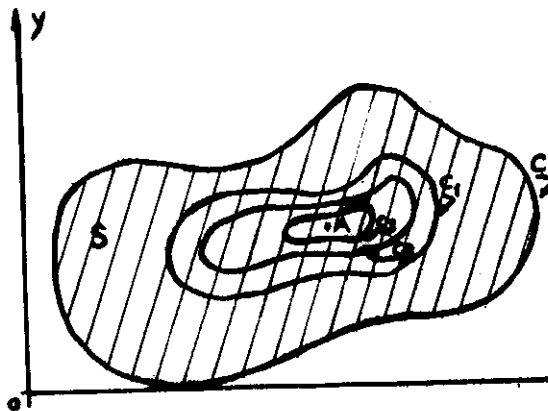
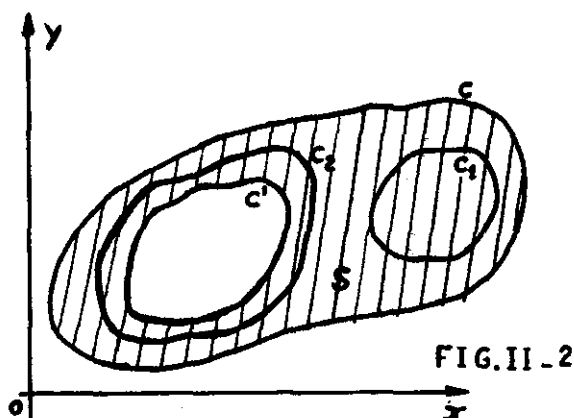


FIG. II-1

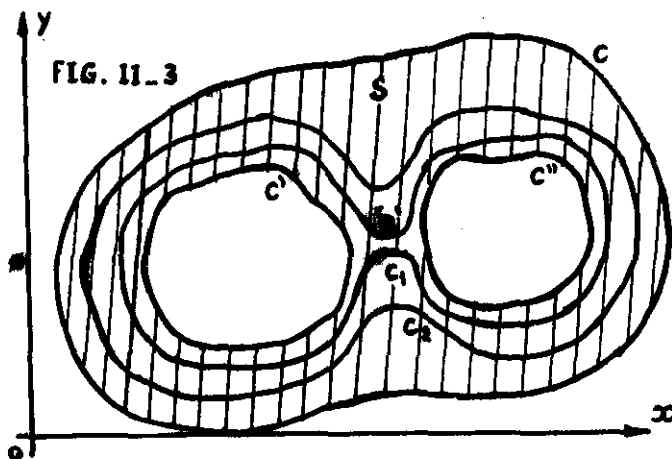
Vemos que qualquer linha fechada traçada no seu interior; se admitirmos que possa contrair-se indefinidamente, acabará por reduzir-se a um ponto; uma região desta natureza denomina-se simplesmente conexa.

Suponhamos agora que se trate da região indicada na fig (II-2), na qual a região está limitada pelas curvas \underline{C} e \underline{C}' .

Nesta existem curvas como C_1 que podemos reduzi-la a um ponto, existem porém outras, como C_2 que não podem ser reduzidas a um ponto sem cortarmos as fronteiras; como veremos logo mais esta região chama-se duplamente conexa.



Na fig. (II-3), temos uma região triplamente conexa; aqui existem curvas como a C_1 que podemos reduzir a duas partes rodeando as curvas C' e C'' , unidas pela linha "a".



As regiões de conexão múltipla podem tornar-se simplesmente conexa mediante cortes; são assim chamadas as linhas que vão de um ponto da fronteira a um ponto da outra.

Assim na fig. (II-4) com um único corte "AB" a região passa a ser simplesmente conexa; a nova região vem a ser "AHGA..BDEBA", o corte "AB" é contado duas vezes, uma num sentido e outra no sentido contrário.

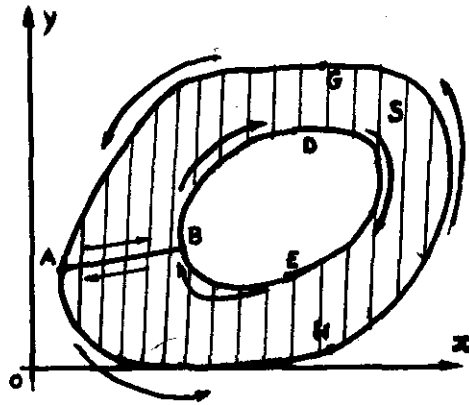


FIG.II-4

Admitindo que a curva que traçamos em S não corte a nova fronteira, podemos reduzi-la a um ponto passando a ser de conexão simples; usamos somente um corte.

Na região assinalada pela fig (II-5), são necessários dois cortes para que passe a ser simplesmente conexa; a nova região possui por fronteiras as curvas C, C' e C'' da primeira, mas as retas AB e DE são contadas duas vezes, uma num sentido e outra no sentido contrário

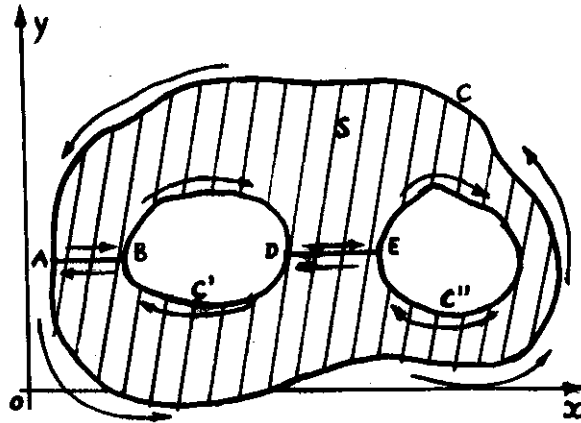


FIG. II-5

Em geral, dada uma região, se necessitamos de $(n-1)$ cortes para que a mesma passe a ser de conexão simples, diz-se então, que sua ordem de conexão é " n ".

2.2. Estado plano de tensões. Expressões fundamentais.

Seja um domínio qualquer representado na fig (II-6), limitado externamente pelo contorno C e internamente por um certo número de contornos C_i .

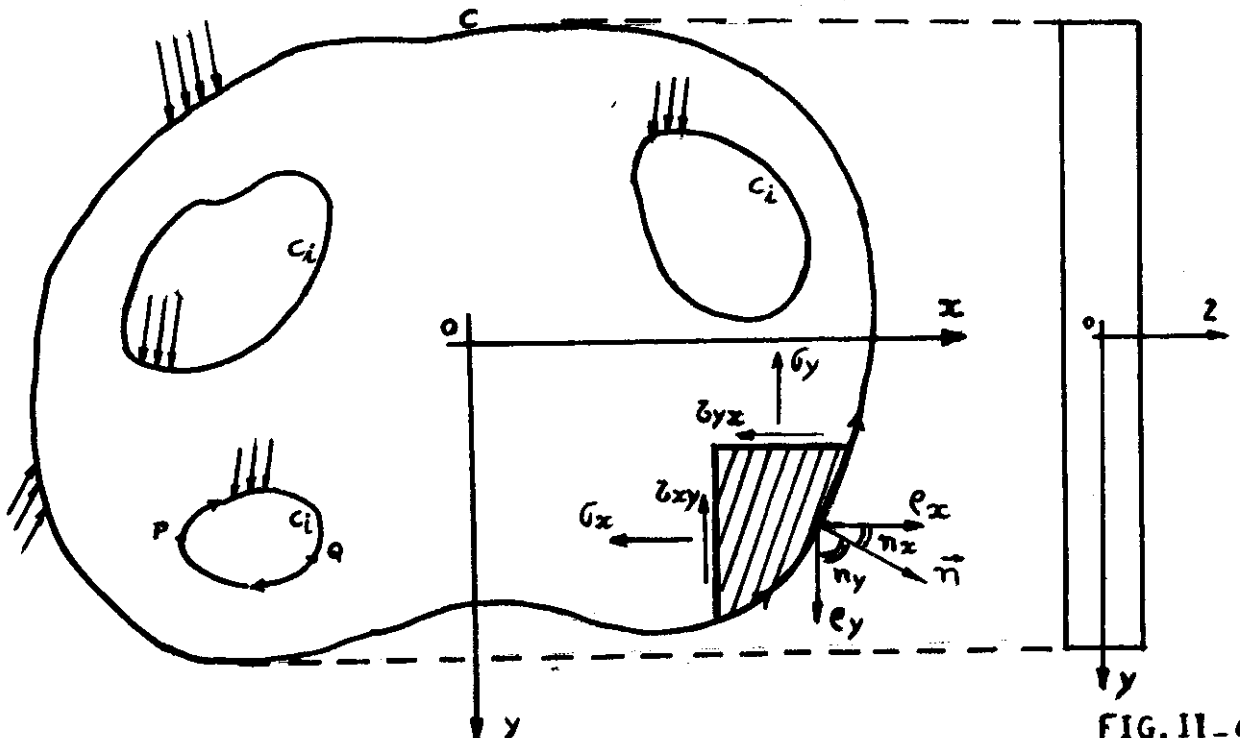


FIG. II-6

Tomando como referência a fig. (II-6), transcreveremos as equações por demais conhecidas da elasticidade plana, considerando forças de massas nulas.

a) Equações de Equilíbrio.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

b) Equação de Compatibilidade.

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

c) Condições de Contorno.

$$\rho_x = \ell \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} \quad ; \text{ onde } \ell = \cos n_x$$

$$\rho_y = \ell \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y \quad m = \cos n_y$$

Resolver uma chapa é calcular as tensões (σ_x, σ_y e τ_{xy}), de forma a satisfazer simultaneamente às equações de equilíbrio, à equação de compatibilidade e as condições de contorno.

2.3. Função de tensões ou função de Airy.

Estudando a solução do problema, G.B. Airy encontrou uma

forma engenhosa de resolver o problema, proposto na seção anterior; ou seja encontrar σ_x , σ_y e τ_{xy} , é definir uma função $\Phi(x,y)$, denominada função de tensões ou função de Airy, como sendo uma função, que se relaciona com as tensões de acordo com as seguintes expressões:

$$\sigma_x = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

Eq. (II-1)

$$\sigma_y = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

Eq. (II-2)

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Eq. (II-3)

Substituamos as tensões dadas pelas Eqs. (II-1), (II-2) e (II-3), nas equações de equilíbrio. Veremos pois, que estas são automaticamente satisfeitas; então as tensões expressas pela função $\Phi(x,y)$ satisfazem automaticamente as equações de equilíbrio transformando-as em identidades.

Substituamos agora, as equações (II-1), (II-2) e (II-3) na equação de compatibilidade $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$.

teremos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(- \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = 0$$

ou;

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

Chegamos, finalmente, a uma equação diferencial parcial de quarta ordem, que é denominada equação bi-harmônica. Esta po de ser escrita também na forma simbólica:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad \text{Eq. (II-4)}$$

Podemos portanto, concluir que resolver uma chapa é encontrar uma $\Phi(x,y)$, que satisfaça a equação (II-4), no seu domínio e na turalmente atenda às condições de contorno.

Conhecida a função de tensões $\Phi(x,y)$, podemos calcular as tensões pelas equações (II-1), (II-2) e (II-3), ou seja:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

A determinação dos deslocamentos, normalmente desneces sária nos domínios simplesmente conexos, faz-se em fase poste rior, através da lei de Hooke, após calculadas as tensões.

Para este cálculo servem de base as relações:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$$

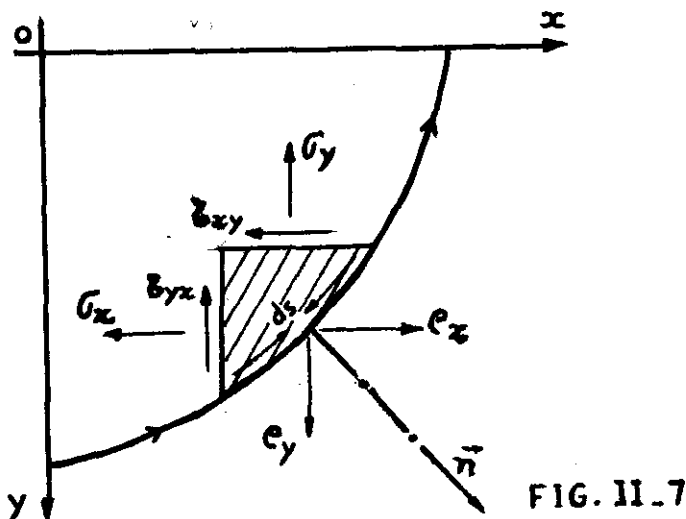
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Eqs. (II-5)

Esta formulação é natural quando é especificado o carregamento do contorno da chapa. Através dele chegamos aos valores da função $\Phi(x,y)$ e suas derivadas no contorno, com as quais temos estabelecidas as condições de bordo. É conveniente que nos detenhamos um pouco neste problema.

2.4. Condições de Contorno

Seja um trecho de um dos contornos da chapa Fig.(II-7). O sentido do caminhamento S do contorno é escolhido de modo a deixar o domínio à esquerda.



Para um elemento infinitesimal do bordo; se ρ_x e ρ_y forem as componentes, por unidade de comprimento das forças aplicadas ao bordo, o equilíbrio do elemento junto a ele é traduzido por:

$$\sigma_x(-dy) + \tau_{xy}.dx = \rho_x ds$$

$$\sigma_y.dx - \tau_{xy}.dy = \rho_y.ds$$

ou, dividindo-as por ds:

$$-\sigma_x \frac{dy}{ds} + \tau_{xy} \frac{dx}{ds} = \rho_x$$

$$\sigma_y \frac{dx}{ds} - \tau_{xy} \frac{dy}{ds} = \rho_y$$

lembrando que:

$$\frac{d}{ds} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{d}{dy} \cdot \frac{dy}{ds}, \text{ e substituindo}$$

do as tensões nas equações acima, por suas expressões dadas pelas equações (II-1), (II-2) e (II-3), ficamos com:

$$\rho_x = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} = - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$$

$$\rho_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$$

ou:

$$\rho_x = - \frac{\partial}{\partial s} \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$$

Eq. (II-6)

$$\rho_y = \frac{\partial}{\partial s} \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$$

Eq. (II-7)

Estas relações podem ser integradas entre dois pontos quaisquer do contôrno, por exemplo: $Q(x_0, y_0)$ e $P(x_s, y_s)$ na fig. (II-8), sendo Q fixo e servindo como origem e P um ponto genérico sobre o contôrno.

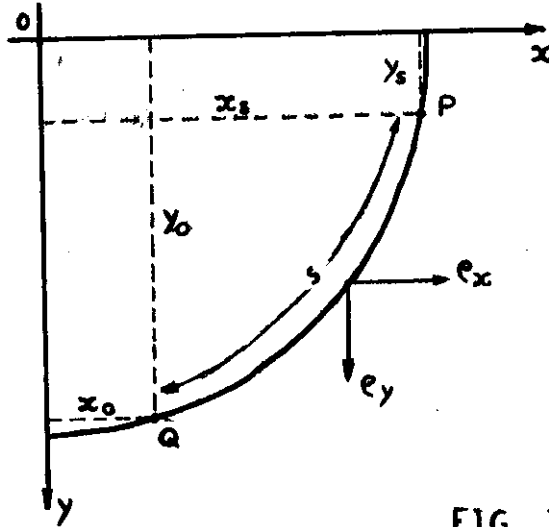


FIG. II-8

Tomando por base as equações (II-6) e (II-7) podemos escrever:

$$\int_Q^P d\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \int_Q^P \rho_y \cdot ds \quad ; \quad \text{ou}$$

$$\left| -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_P = \int_Q^P \rho_y \cdot ds + \left| -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_Q = \int_Q^P \rho_y \cdot ds + A$$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_P = \int_Q^P \rho_y \cdot ds + A$$

Eq. (II-8)

$$\int_Q^P d\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = - \int_Q^P \rho_x \cdot ds ; \text{ ou }$$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_P = - \int_Q^P \rho_x \cdot ds + \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_Q = - \int_Q^P \rho_x \cdot ds + B$$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_P = - \int_Q^P \rho_x \cdot ds + B$$

Eq. (II-9)

Onde A e B são constantes, porque expressam, respectivamente, os valores de $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ no ponto Q escolhido arbitrariamente como origem, ou seja:

$$\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_Q = A \quad \text{e} \quad \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_Q = B$$

Levemos em consideração que:

$$\int_Q^P \rho_y \cdot ds = Q_y \quad (\text{resultante das forças de contorno na direção } y, \text{ entre } Q \text{ e } P)$$

$$\int_Q^P \rho_x \cdot ds = Q_x \quad (\text{resultante das forças de contorno na direção } x, \text{ entre } Q \text{ e } P)$$

Na solução dos problemas para regiões simplesmente conexas, as constantes A e B são abandonadas por não influírem na curvatura da superfície $\Phi(x,y)$ e em consequência também nas tensões. Nas regiões de conexão múltipla não desfrutamos desta liberdade e não podemos dispor de A e B a nosso arbítrio.

Sendo assim, reescrevamos as equações (II-8) e (II-9); que representam as derivadas de $\Phi(x,y)$ no bordo.

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_P = Q_y + A$$

Eq. (II-10)

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_P = -Q_x + B$$

Eq. (II-11)

Conhecidas as derivadas no bordo, chegamos aos valores da função $\Phi(x,y)$ no contôrn^o, por meio de uma nova integração de contôrn^o, isto é pondo as equações (II-10) e (II-11), na expressão fornecida pelo cálculo diferencial:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

integrando entre Q e P:

$$\int_Q^P d\Phi = \int_Q^P \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot dx + \int_Q^P \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot dy$$

Tendo em vista as equações (II-10) e (II-11).

$$\Phi_P - \Phi_Q = \int_Q^P (Q_y + A) \cdot dx + \int_Q^P (-Q_x + B) \cdot dy$$

$$\Phi_P - \Phi_Q = \int_Q^P Q_y \cdot dx + \int_Q^P A \cdot dx - \int_Q^P Q_x \cdot dy + \int_Q^P B \cdot dy$$

$$\Phi_P - \Phi_Q = \int_Q^P Q_y \cdot dx - \int_Q^P Q_x \cdot dy + A(X_s - X_o) + B(Y_s - Y_o)$$

Por meio de uma integração por partes das integrais restantes chegamos a:

$$\begin{aligned} \Phi_P - \Phi_Q &= Q_y \cdot X_s - \int_Q^P x \cdot d(Q_y) - Q_x \cdot Y_s + \int_Q^P Y \cdot d(Q_x) + \\ &+ A(X_s - X_o) + B(Y_s - Y_o) \end{aligned}$$

Observemos atentamente as figuras (II-9) e (II-10), notamos que $\int_Q^P x \cdot d(Q_y)$, representa o momento total das forças de direção y em relação a origem dos eixos coordenados; podendo portanto ser representada como:

$$Q_y \cdot X_r, \text{ analogamente } \int_Q^P Y \cdot d(Q_x) = Q_x \cdot Y_r$$

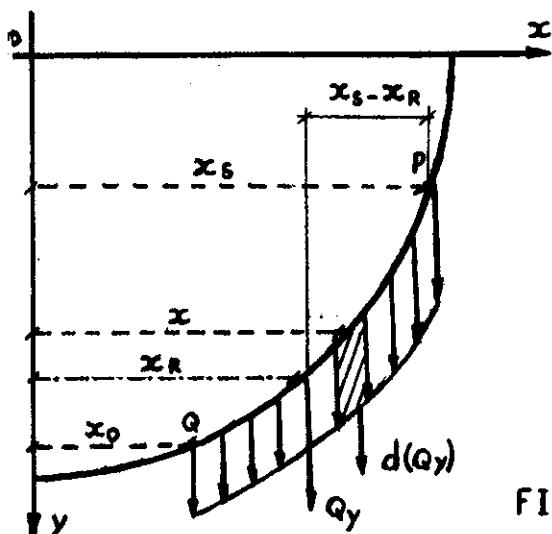


FIG. II-9

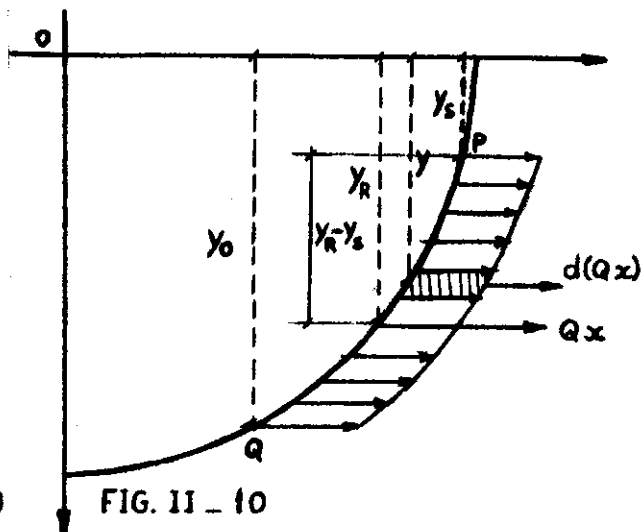


FIG. II-10

Com isso ficamos com a seguinte expressão para Φ .

$$\Phi_P - \Phi_Q = Q_y \cdot X_s - Q_y \cdot X_r - Q_x \cdot Y_s + A(X_s - X_0) + B(Y_s - Y_0)$$

ou:

$$\Phi_P - \Phi_Q = Q_y(X_s - X_r) + Q_x(Y_r - Y_s) + Ax_s + By_s - Ax_0 - By_0$$

Observando mais uma vez as figuras (II-9) e (II-10), notamos que:

$$Q_y \cdot (X_s - X_r) = (M_y)_P \quad (\text{momento das forças de contorno de direção } y, \text{ existentes no trecho } \vec{QP} \text{ em relação ao ponto } P) \text{ analoga}$$

mente:

$$Q_x(Y_r - Y_s) = (M_x)_P \quad (\text{momento das forças de contorno de direção } x, \text{ existentes no trecho } \vec{QP} \text{ em relação ao ponto } P)$$

direção x , existentes no trecho \vec{QP} em relação ao ponto P)

Depois destas considerações teremos:

$$\Phi_P - \Phi_Q = (M_y)_P + (M_x)_P + A.X_S + B.Y_S - A.X_O - B.Y_O$$

ou ainda:

$$\Phi_P = M_P + A.X_S + B.Y_S - A.X_O - B.Y_O + \Phi_Q$$

Desta forma $M_P = (M_x)_P + (M_y)_P$, representa o momento de todas as forças de contorno existentes no trecho \vec{QP} em relação a \underline{P} genérico.

Como o ponto $Q(x_O, y_O)$, representa a origem, e portanto é arbitrário; façamos:

$(-A.x_O - B.y_O + \Phi_Q) = C$ (constante), o que não afetará as tensões.

Portanto a função $\Phi(x,y)$ no bordo será representada por:

$$\Phi_P = M_P + A.x_S + B.y_S + C$$

Eq. (II-12)

A expressão para $\phi_p(x,y)$ no contorno, distingui-se do caso dos domínios simplesmente conexos pela presença do fator linear de contorno $(A.x_s + B.y_s + C)$.

Considerando-se que M_p representa o momento de todas as forças de contorno compreendidas entre Q e P sobre o contorno s; adotando ϕ_p positivo no sentido anti-horário.

Em particular, se o contorno for descarregado ($M_p = 0$) e ϕ_p , reduz-se a:

$$\phi_p = A.x_s + B.y_s + C$$

Eq. (II-13)

É de se notar, que as constantes A, B, e C, tomam valores diversos para os vários contornos do domínio, e são novas incógnitas a determinar; devendo-se buscar novas condições que permitam a sua fixação.

2.5. Critérios de fixação das constantes de contorno.

Para melhor compreendermos a natureza do problema, vamos encará-lo pelo lado geométrico. Seja a chapa que cobre a região $\alpha \beta \gamma \delta$ do plano xy e provida dos orifícios C_1 e C_2 como mostra a fig. (II-11).

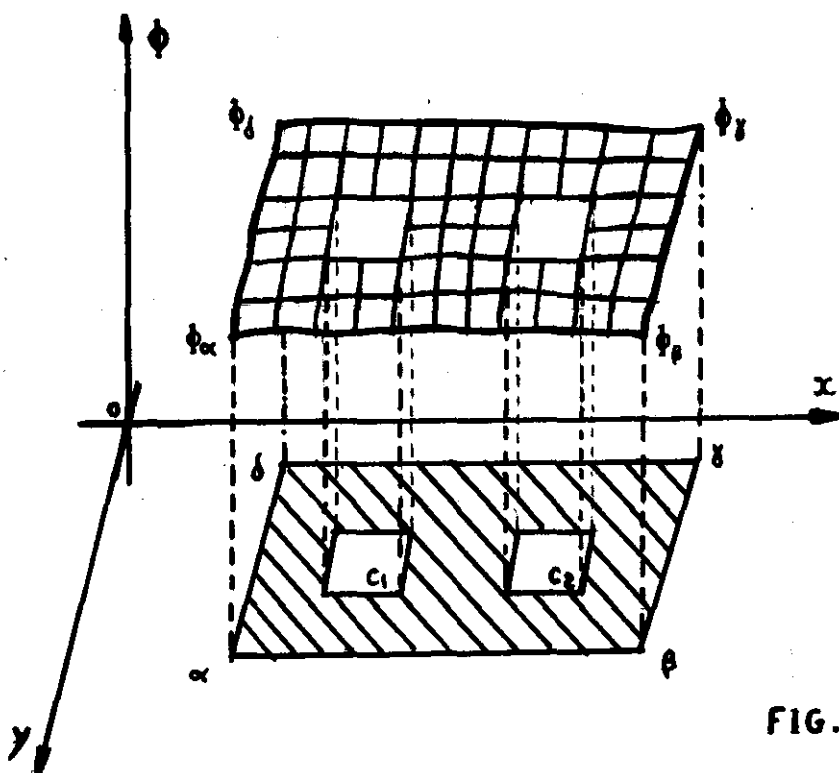


FIG. II-11

Se em cada ponto do contorno e do domínio levantarmos uma perpendicular, representando a grandeza da função ϕ naquele ponto; obteremos a superfície $\phi(x,y)$. As ordenadas ϕ estarão fixadas na periferia do domínio, a menos de fatores lineares aos quais denominamos:

$$Ax + By + C; \text{ sobre } C$$

$$A_1x + B_1y + C_1; \text{ sobre } C_1$$

$$A_2x + B_2y + C_2; \text{ sobre } C_2$$

Raciocinemos com os contornos internos C_1 e C_2 descarregados e o contorno externo C carregado.

Imaginemos a função Φ determinada; isto é, a forma da superfície Φ perfeitamente fixada.

Se alterarmos as constantes de um dos contornos, os de \underline{C} , por exemplo, toda a superfície sofre um movimento rígido, mantendo porém sua forma e assim sua curvatura. Os contornos internos de Φ , situados num plano, por estarem descarregados (Eq. II-13) porém com orientação qualquer, acompanham o movimento rígido da superfície.

Concluimos assim que um movimento deste gênero não influirá nas tensões e podemos dispor livremente das três constantes deste contorno, fazendo-as nulas. (como nos domínios simplesmente conexos). Restam-nos três constantes em cada contorno interno da região.

Poderia parecer à primeira vista que os fatores lineares dos contornos internos ($A_1x + B_1y + C_1$ e $A_2x + B_2y + C_2$), não seriam essenciais ao estado de tensão, pois como fatores aditivos a função Φ ; desapareceriam com a derivação segunda. Devemos porém observar que são eles fatores de contorno, isto é, fazem parte das condições de bordo especificadas para Φ e irão influir na própria forma de toda superfície Φ .

Para fixar o valor das constantes de contorno, temos dois meios. O primeiro é obrigar os deslocamentos a serem funções unívocas de sua posição no domínio e o outro; escolher as constantes de contorno, de modo a tornar a energia elástica arma

zenada na chapa um mínimo, segundo o princípio geral da elasticidade.

Ocupemo-nos neste trabalho do primeiro método, mais tarde justificaremos o porque desta escolha.

Devemos impor a condição de unicidade a \underline{u} , \underline{v} e as derivadas $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$, pois as demais terão unicidade garantida, se Φ for unívoca, segundo as equações (II-5).

Para isto devemos ter:

$$\oint du = 0 ; \quad \oint dv = 0 ; \quad \oint d\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 ; \quad \oint d\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 .$$

Para uma curva qualquer \vec{PQP} na fig. (II-12), situada no domínio. Estas poderão, naturalmente, também circundar os orifícios internos.

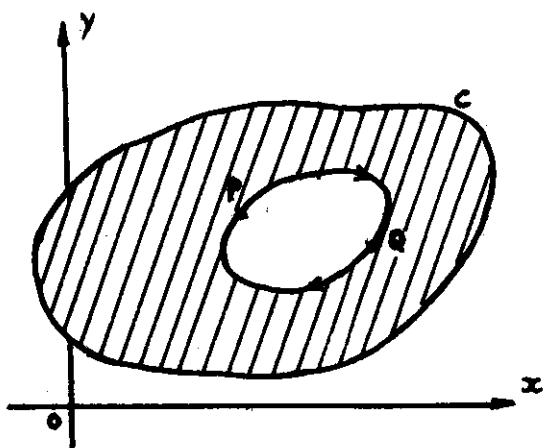


FIG. II-12

Vejamos as condições de unicidade para \underline{u} e \underline{v} , em primeiro lugar.

$$\oint du = \oint \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) = 0$$

Integrando o segundo fator por partes, teremos:

$$\int_P^Q \frac{\partial u}{\partial y} dy = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \cdot y \right|_P^Q - \int y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

Quando $Q \rightarrow P$; isto é, a curva é fechada, o fator constante anula-se em virtude da unicidade de y , de modo que:

$$\int_P^Q \frac{\partial u}{\partial y} dy = - \int_P^Q y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = - \oint y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

então:

$$\oint \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) = \oint \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right) = 0$$

Das equações (II-5), que relacionam os deslocamentos com as tensões pela lei de Hooke podemos tirar certas relações importantes; vejamos.

Derivando a primeira das equações (II-5) em relação a

y obtemos :

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} - \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

Eq. (II-14)

Derivando agora a segunda das (II-5) em relação x teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right)$$

Eq. (II-15)

Da terceira das equações (II-5), explicitando o valor de $\frac{\partial x}{\partial y}$, e derivando em relação a y obteremos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Substituindo nesta, $\frac{\partial v}{\partial y}$ por sua expressão dada na segunda das equações (II-5), chegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right)$$

Eq. (II-16)

Analogamente, da terceira das equações (II-5), explicitando o valor de $\frac{\partial v}{\partial x}$, derivando-a em relação a x e substituindo nesta, a expressão de $\frac{\partial u}{\partial x}$ dada na primeira das (II-5), obteremos finalmente.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + (2+v) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} \right)} \quad \text{Eq. (II-17)}$$

As equações (II-14) até (II-17), serão importantes na formulação das condições de unicidades, como veremos a seguir.

$$\text{Voltando a integral curvilínea } \oint \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx - y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dy \right) = 0;$$

tendo em vista a primeira das equações (II-5) e a Eq.(II-16), esta transformar-se-a em:

$$\oint \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) dx + y \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + (2+v) \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right) \cdot dy \right] = \oint du = 0$$

$$\text{Eq. (II-18)}$$

ou seja, a primeira das condições de unicidade de deslocamentos.

Para o caso de \underline{V} , a condição $\oint dv = 0$, transformar-se a em:

$$\oint dv = \oint \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = 0, \text{ após a integração por}$$

partes do primeiro fator vem:

$$\int_P^Q \frac{\partial v}{\partial x} dx = \left| \frac{\partial v}{\partial x} \cdot x \right|_P^Q - \int_P^Q x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx ; \text{ quando } P \rightarrow Q, \text{ a}$$

curva é fechada, o fator constante anula-se em virtude da unicidade de \underline{x} ; de modo que:

$$\int_P^Q \frac{\partial v}{\partial x} dx = - \int_P^Q x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = - \oint x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx.$$

$$\text{A integral curvilínea será: } \oint \left(\frac{\partial v}{\partial y} dy - x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \right) = 0 ,$$

que com o emprego da 2ª das eqs. (II-5) e da eq. (II-17), em substituição as derivadas $\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ respectivamente, nos dará:

$$\begin{aligned} & \oint \left[x \cdot \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + (2+v) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - d \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dy \right] = \\ & = \oint dv = 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. (II-19)}$$

Vejamos agora em que resulta a condição de serem diferenciais exatas as funções $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$, isto é, as últimas das condições de unicidade, temos:

$$\oint d \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \text{ e } \oint d \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \text{ diferenciando-as teremos:}$$

$$\oint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot dy \right] = 0 \quad e$$

$$\oint \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot dy \right] = 0$$

Se empregarmos as equações (II-14) e (II-16), na primeira, e as equações (II-17) e (II-15) na segunda respectivamente, em substituição às funções derivadas dos deslocamentos, obtaremos finalmente as últimas das condições de unicidade, transcritas abaixo:

$$\oint \left[\left(-\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} - \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right) dx - \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right) dy \right] = 0$$

$$\oint \left[-\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right) dx + \left(-\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right) dy \right] = 0$$

Eqs. (II-20)

Que estas duas condições são idênticas, demonstraremos facilmente empregando o teorema de Green e transformando as integrais de contorno em integrais de domínio.

As equações (II-20), foram deduzidas para qualquer caminhamento fechado, tomado dentro do domínio. Para maior facilidade

dade de raciocínio, consideremos uma região com sômente um contorno interno fig. (II-13).

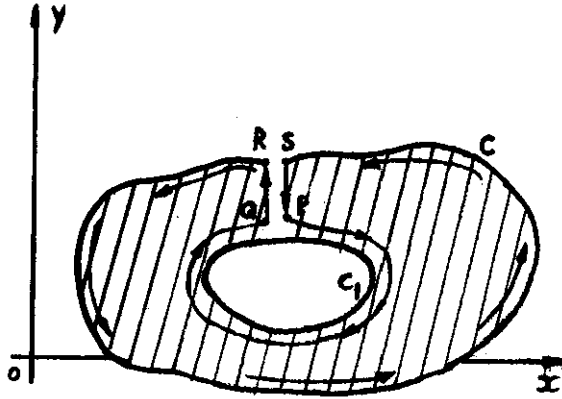


FIG. II-13

Tomemos a curva que vai de P a Q, circundando o orifício interno, indo após até R, de onde percorre o contorno externo C, voltando finalmente ao ponto de partida P. O trecho $\vec{QR} = \vec{SP}$, é percorrido uma vez num sentido e outra vez no outro, não dando contribuição à integral curvilínea. Temos assim a integral estendida a todo o contorno da região, deixando-a, sempre a esquerda do caminhamento, de acordo com a convenção estabelecida.

Sabemos pelo teorema de Green que:

$$\oint (F \cdot dy - G \cdot dx) = \iint \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy$$

Aplicando-se ao nosso caso, por exemplo à segunda das equações (II-20), teremos:

$$F = \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} - \nu \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right) ; G = \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

O que equivale à condição:

$$\iint \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \nu \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + (2+\nu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \cdot dx \cdot dy = 0 \quad ,$$

operando os fatores semelhantes chegaremos a:

$$\iint \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) dx \cdot dy = \iint \nabla^4 \Phi dx \cdot dy = 0$$

A igual conclusão chegaríamos, tomando a primeira das equações (II-20), vejamos:

$$F = \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right) ; G = \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} - \nu \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

$$\iint \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (2+\nu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - \nu \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \cdot dx \cdot dy$$

Operando com os termos semelhantes:

$$\iint \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) \cdot dx \cdot dy = \iint \nabla^4 \Phi \, dx \cdot dy = 0$$

Isto prova a equivalência das duas equações (II-20), podendo assim, ambas as condições serem usadas indiferentemente nos cálculos.

Para a fixação das três constantes de contorno(A, B e C) teremos então as condições dadas pelas eqs. (II-18) e (II-19), e uma das condições dada pelas eqs. (II-20). Poderíamos usar também suas equivalentes condições de domínio. Para o procedimento numérico, objetivo deste trabalho, o mais conveniente é tomar as integrais curvilíneas, circundando o contornos internos, tendo-se assim três condições para as três constantes de cada contorno.

Algumas palavras, sobre o segundo método de determinação das constantes de contorno.

A energia elástica armazenada na chapa sujeita a um estado de tensão dado; como sabemos pode ser expressa por:

$$A^* = \frac{1}{2E} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y + 2(1+\nu) \tau_{xy}^2 \right], \text{ ou em função}$$

da função de tensões:

$$A^* = \frac{1}{2E} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 - 2\nu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + 2(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$$

A função Φ que corresponde ao estado verdadeiro de tensão da chapa é aquele que torna A^* mínimo, podendo-se utilizar esta condição para determinar as constantes A, B, e C.

Se operarmos numericamente, A^* pode ser expressa em função dos valores de Φ do domínio e do contorno, nos pontos escolhidos, resultando uma função quadrática dêles, isto é, $A^* = f(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, A, B, C)$.

Pelas condições: $-\frac{\partial A^*}{\partial A} = 0$; $-\frac{\partial A^*}{\partial B} = 0$ e $-\frac{\partial A^*}{\partial C} = 0$, teremos

um sistema de três equações lineares em A, B, e C, que nos permite calculá-las; porém serão dados em função dos quadrados dos Φ_n , transformando o sistema linear de equações, correspondente à condição $\nabla^4 \Phi$; em não linear. Isto torna o processo praticamente fora de cogitações para o método das diferenças finitas daí optarmos pelo primeiro método (condições de unicidade dos deslocamentos), para fixarmos os valores das constantes de contorno.

CAPÍTULO III - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: COORDENADAS CARTESIANAS RETANGULARES:

3.1. Considerações gerais.

Serão apresentados os conceitos básicos do método das diferenças finitas e a disposição em forma de molécula de todos os operadores utilizados na resolução numérica.

3.2. Conceituação. Diferenças finitas ordinárias.

O método consiste em explicitar as derivadas de uma função $Y = f(x)$ fig.(III-1), em termos do valor da mesma, em determinados pontos. Substituindo-se as expressões exatas de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., $\frac{d^ny}{dx^n}$ pelos operadores de diferenças $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, ..., $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$, que representam uma aproximação para as derivadas; onde $\Delta^n y$ significa a diferença de ordem "n" de y.

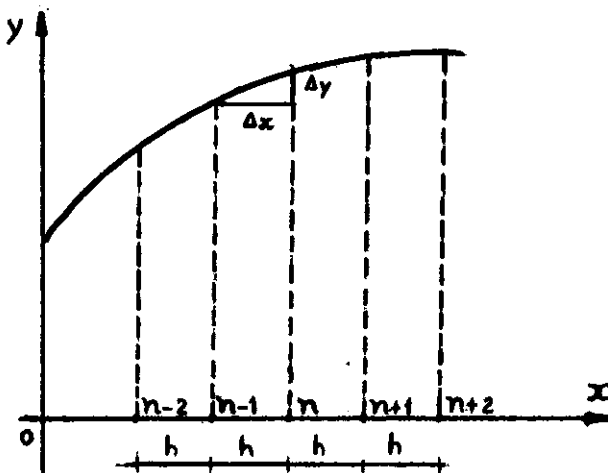


FIG. III-1

Vejamos a representação das derivadas por diferenças finitas. As derivadas de uma função $y(x)$ são definidas como a razão do incremento de "y", em relação a "x", e suas derivadas são representadas analiticamente por:

1ª derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

2ª derivada:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} - \frac{y(x) - y(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

3ª, 4ª, ..., etc.

Observando a fig.(III-1), se " Δx " não tender para zero e portanto tiver um valor finito "h", as derivadas no ponto $x = x_n$, serão representadas por suas expressões em diferenças finitas.

As expressões para as diferenças de 1ª ordem no ponto $x = x_n$, podem ser expressas de três maneiras:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{Y_{n+1} - Y_n}{h} \quad \text{Eq. (III-1)}$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{h} \quad \text{Eq. (III-2)}$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{Y_{n+1} - Y_{n-1}}{2h} \quad \text{Eq. (III-3)}$$

A equação (III-1) é denominada diferença em avanço, a equação (III-2) diferença em atraso e a equação (III-3) diferença central. Observa-se que na diferença em avanço usam-se sempre termos a direita de "n", em atraso à esquerda e central em torno de "n". Pode-se empregar mais de uma forma para um mesmo problema. Neste trabalho foram empregadas as diferenças centrais na solução das placas sob flexão; na solução das chapas (estado plano de tensões) foram empregadas as três formas distintas para representar as derivadas 1^{as}, quando da aplicação das condições de bordo, como veremos no capítulo V.

Para as diferenças finitas centrais de segunda ordem teremos:

$$\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n = \frac{(\Delta y_{n+1})/h - (\Delta y_n)/h}{h} \quad (\text{diferença em avanço})$$

ou

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n &= \frac{(Y_{n+1} - Y_n)/h - (Y_n - Y_{n-1})/h}{h} = \\
 &= \frac{Y_{n+1} - 2Y_n + Y_{n-1}}{h^2} \quad (\text{diferença central}) \quad \text{Eq. (III-4)}
 \end{aligned}$$

De maneira análoga, calculam-se em diferenças finitas as derivadas de maior ordem; vejamos as expressões em diferenças finitas das derivadas de 3^a e 4^a ordem, que precisaremos ao longo deste trabalho.

Utilizando-se das diferenças centrais e procedendo de maneira análoga a 1^a e 2^{as} derivadas teremos:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}\right) &= \frac{(\Delta^2 Y_{n+1})/h^2 - (\Delta^2 Y_{n-1})/h^2}{2h} = \\
 &= \frac{Y_{n+2} - 2Y_{n+1} + 2Y_{n-1} - Y_{n-2}}{2h^3} \quad \text{Eq. (III-5)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}\right) &= \frac{(\Delta^2 Y_{n+1})/h^2 - (2\Delta^2 Y_n)/h^2 + (\Delta^2 Y_{n-1})/h^2}{h^2} = \\
 &= \frac{Y_{n+2} - 4Y_{n+1} + 6Y_n - 4Y_{n-1} + Y_{n-2}}{h^4} \quad \text{Eq. (III-6)}
 \end{aligned}$$

As eqs. (III-3), (III-4), (III-5) e (III-6), representam as aproximações em diferenças finitas centrais para as derivadas de 1^a, 2^a, 3^a e 4^a ordem.

3.3. Diferenças finitas parciais.

Seja a função $z = f(x,y)$ fig. (III-2). Desenvolvendo $f(x+h,y)$ e $f(x-h,y)$ em séries de Taylor, nas vizinhanças do ponto (x,y) , na direção "x" obtém-se:

$$\begin{aligned} f(x+h,y) = & f(x,y) + h \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \\ & + \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x,y) + \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(\epsilon_1, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x-h,y) = & f(x,y) - h \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) - \\ & - \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x,y) + \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(\epsilon_2, y) \end{aligned}$$

Somando-se membro a membro estas equações obter-se-a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{1}{h^2} \left[f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y) - \right. \\ \left. - \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(\epsilon_1, y) + (\epsilon_2, y) \right] \end{aligned}$$

Esta expressão poderá ser escrita de uma maneira mais sintética:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{1}{h^2} \left[f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y) \right] + O(h^2)$$

Eq. (III-7)

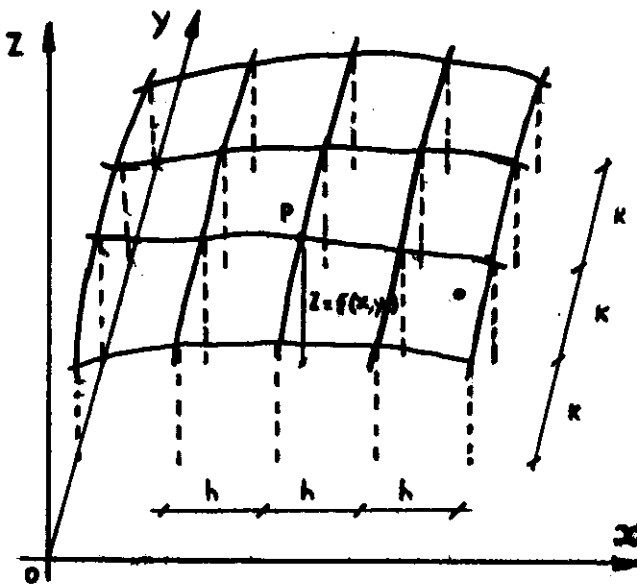


FIG. III-2

De uma maneira análoga seriam obtidas as expressões para 1^a, 3^a e 4^a diferenças parciais em relação a "x"; O que transcrevemos a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{2h} \left[f(x+h,y) - f(x-h,y) \right] + O(h^2) \quad \text{Eq. (III-8)}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x,y) = \frac{1}{2h^3} \left[f(x+2h,y) - 2f(x+h,y) + 2f(x-h,y) - f(x-2h,y) \right] + O(h^2)$$

Eq. (III-9)

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x,y) = \frac{1}{h^4} \left[f(x+2h,y) - 4f(x+h,y) + 6f(x,y) - 4f(x-h,y) + f(x-2h,y) \right] + O(h^2)$$

Eq. (III-10)

Do mesmo modo se a função $z = f(x,y)$ for desenvolvida em série de Taylor, nas vizinhanças do ponto (x,y) porém na direção "Y", com intervalos finitos iguais a "K" fig.(III-2); obter-se-ão expressões análogas para as diferenças finitas parciais de 1^a, 2^a, 3^a e 4^a ordem, transcritas abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{1}{2k} \left[f(x,y+k) - f(x,y-k) \right] + O(k^2)$$

Eq. (III-11)

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{1}{k^2} \left[f(x,y+k) - 2f(x,y) + f(x,y-k) \right] + O(k^2)$$

Eq. (III-12)

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x,y) = \frac{1}{2k^3} \left[f(x,y+2k) - 2f(x,y+k) + 2f(x,y-k) - \right. \\ \left. - f(x,y-2k) \right] + O(k^2) \quad \text{Eq. (III-13)}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial y^4} f(x,y) = \frac{1}{k^4} \left[f(x,y+2k) - 4f(x,y+k) + 6f(x,y) - \right. \\ \left. - 4f(x,y-k) + f(x,y-2k) \right] + O(k^2) \quad \text{Eq. (III-14)}$$

Em virtude da relação do cálculo diferencial:

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(x,y) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right) = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m} \right)$$

As diferenças finitas parciais mistas poderão ser facilmente avaliadas; é do nosso interesse avaliar as expressões das diferenças finitas parciais mistas de 2^a e 4^a ordem. Operando em diferenças a expressão $\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ obter-se-á:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{1}{4h.k} \left[f(x+h,y+k) - f(x+h,y-k) - \right. \\ \left. - f(x-h,y+k) + f(x-h,y-k) \right] + O(hk) \quad \text{Eq. (III-15)}$$

Analogamente, operando sobre $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})$ chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} f(x,y) = & \frac{1}{h^2 k^2} \left[4f(x,y) - 2(f(x+h,y) + f(x-h,y) + \right. \\ & + f(x,y+k) + f(x,y-k)) + f(x+h,y+k) + f(x+h,y-k) + f(x-h,y+k) + \\ & \left. + f(x-h,y-k) \right] \end{aligned} \quad \text{Eq. (III-16)}$$

Como se pode observar das expressões (III-7) a (III-16), o erro de truncamento é da ordem de (h^2) ou (k^2) .

É nossa intenção chegarmos a expressão do bi-Laplaciano ($\nabla^4 f(x,y)$) em diferenças finitas; vejamos:

$$\nabla^4 f(x,y) = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) f(x,y), \text{ substituindo}$$

as expressões das derivadas parciais, por suas correspondentes em diferenças finitas obtém-se:

$$\begin{aligned} \nabla^4 f(x,y) = & \frac{1}{h^4} \left[f(x+2h,y) - 4f(x+h,y) + 6f(x,y) - 4f(x-h,y) + \right. \\ & \left. + f(x-2h,y) \right] + \frac{2}{h^2 k^2} \left[4f(x,y) - 2(f(x+h,y) + f(x-h,y) + \right. \\ & \left. + f(x,y+k) + f(x,y-k)) + f(x+h,y+k) + f(x+h,y-k) + f(x-h,y+k) + \right. \\ & \left. + f(x-h,y-k) \right] \end{aligned}$$

$$+ f(x-h, y-k) \Big] + \frac{1}{k^4} \Big[f(x, y+2k) - 4f(x, y+k) + 6f(x, y) - \\ - 4f(x, y-k) + f(x, y-2k) \Big] \quad \text{Eq. (III-17)}$$

Esta expressão é válida para uma malha retangular com intervalos finitos nas direções x e y diferentes, como ilustra a figura (III-3), um elemento desta malha será:

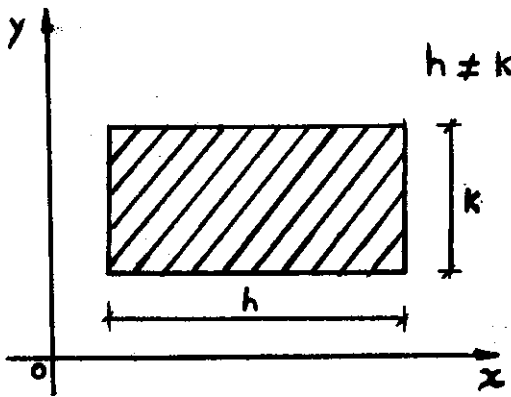


FIG. III.3

Porém se os intervalos finitos forem iguais ($h=k$); a expressão do bi-laplaciano $\nabla^4 f(x,y)$ será simplificada.

Fazendo-se na Eq. (III-17); $h=k=\lambda$ teremos:

$$\nabla^4 f(x,y) = \frac{1}{\lambda^4} \Big[20f(x,y) - 8(f(x+\lambda, y) + f(x-\lambda, y) + f(x, y+\lambda) + \\ + f(x, y-\lambda)) + 2(f(x+\lambda, y+\lambda) + f(x-\lambda, y+\lambda) + f(x-\lambda, y-\lambda) + \\ + f(x+\lambda, y-\lambda)) + \\ + (f(x+2\lambda, y) + f(x-2\lambda, y) + f(x, y+2\lambda) + f(x, y-2\lambda)) \Big]$$

Esta expressão representa o operador bi-laplaciano em di

ferenças finitas com intervalos finitos iguais; portanto é válida para uma malha regular com elementos quadrados e será aplicada com maior intensidade neste trabalho.

3.4. Operadores dispostos em moléculas.

A obtenção dos operadores dispostos em moléculas, se faz tomando um ponto central (i,j) e desenvolvendo (III-17) e (III-18), de acordo com (III-10), (III-14) e (III-16).

Uma vez feitas as operações e simplificações, obtêm-se as expressões para as eqs. (III-17) e (III-18).

Vejamos primeiro a forma do operador $\nabla^4 f(x,y)$, com intervalos finitos diferentes, nos deteremos ao caso particular em que $h = 2k$.

$$\begin{aligned} \nabla^4 f(x,y) = & \frac{1}{h^4} (F_{i+2,j} - 4F_{i+1,j} + 6F_{i,j} - 4F_{i-1,j} + F_{i-2,j}) + \\ & + \frac{8}{h^4} \left[(4F_{i,j} - 2(F_{i+1,j} + F_{i-1,j} + F_{i,j+1} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j+1} \right. \\ & + F_{i+1,j-1} + F_{i-1,j+1} + F_{i-1,j-1})) + \frac{16}{h^4} [F_{i,j+2} - 4F_{i,j+1} + \\ & \left. + 6F_{i,j} - 4F_{i,j-1} + F_{i,j-2}] \right] \end{aligned}$$

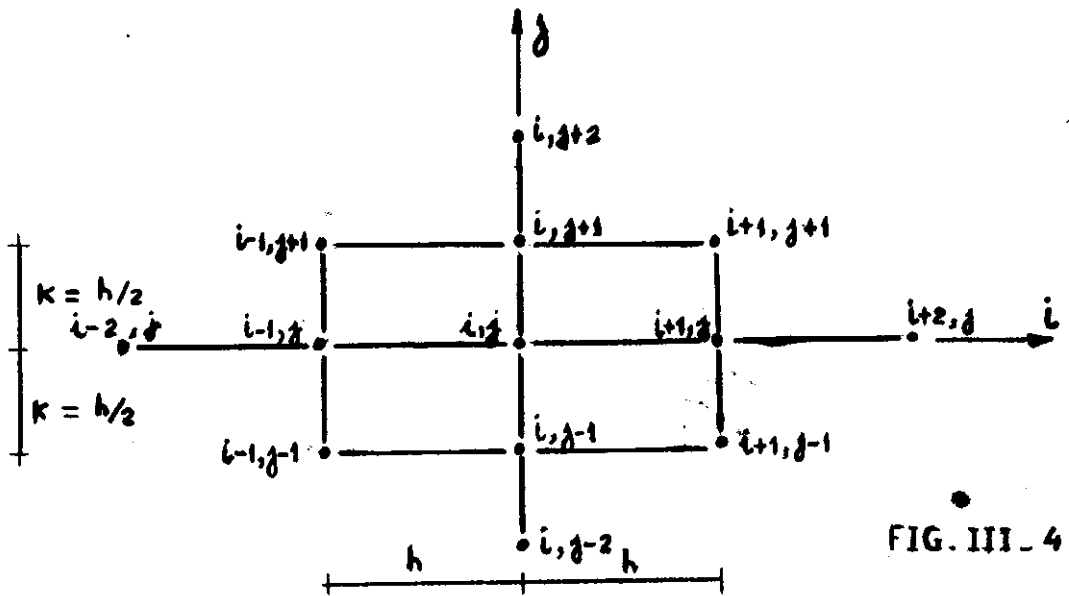


FIG. III-4

Operando com os termos semelhantes ficamos com:

$$\begin{aligned} \nabla^4 F = \frac{1}{h^4} & \left[134F_{i,j} - 80(F_{i,j+1} + F_{i,j-1}) - 20(F_{i+1,j} + F_{i-1,j}) + \right. \\ & + 8(F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1} + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j-1}) + 16(F_{i,j+2} + \\ & \left. + F_{i,j-2}) + F_{i+2,j} + F_{i-2,j} \right] \end{aligned} \quad \text{Eq. (III-19)}$$

Colocando esta expressão, sob uma forma compacta, teremos a molécula representada na fig. (III-5).

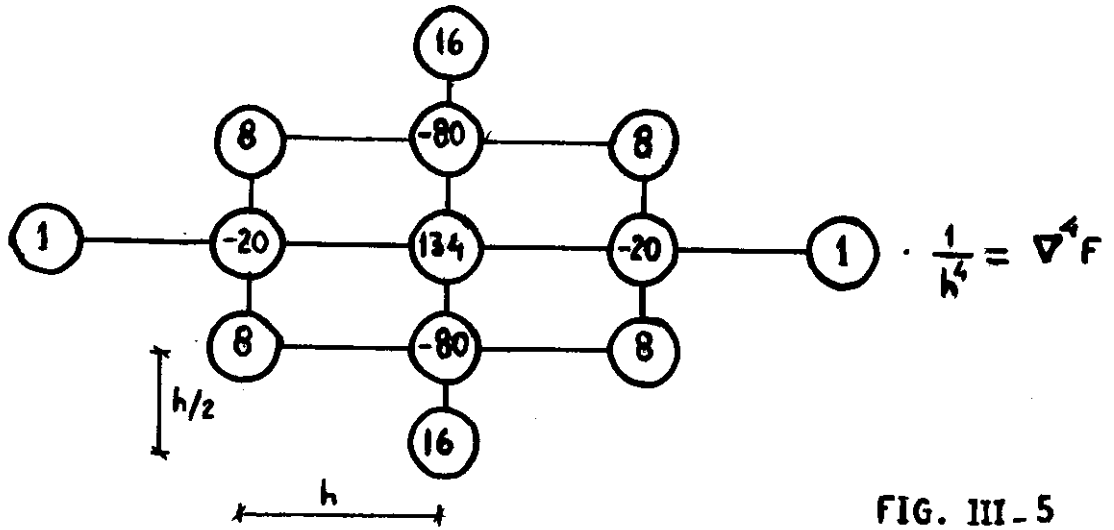


FIG. III-5

Para o caso em que os intervalos são iguais, ou seja $h = k = \lambda$ o operador $\nabla^4 F$ terá a forma compacta.

$$\begin{aligned} \nabla^4 F = \frac{1}{\lambda^4} & \left[20F_{i,j} - 8(F_{i+1,j} + F_{i-1,j} + F_{i,j+1} + F_{i,j-1}) + \right. \\ & + 2(F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1} + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j-1}) + \\ & \left. + F_{i+2,j} + F_{i-2,j} + F_{i,j+2} + F_{i,j-2} \right] \end{aligned} \quad \text{Eq. (III-20)}$$

Colocando-se esta, no arranjo de molécula, seus coeficientes são vistos na fig.(III-6).

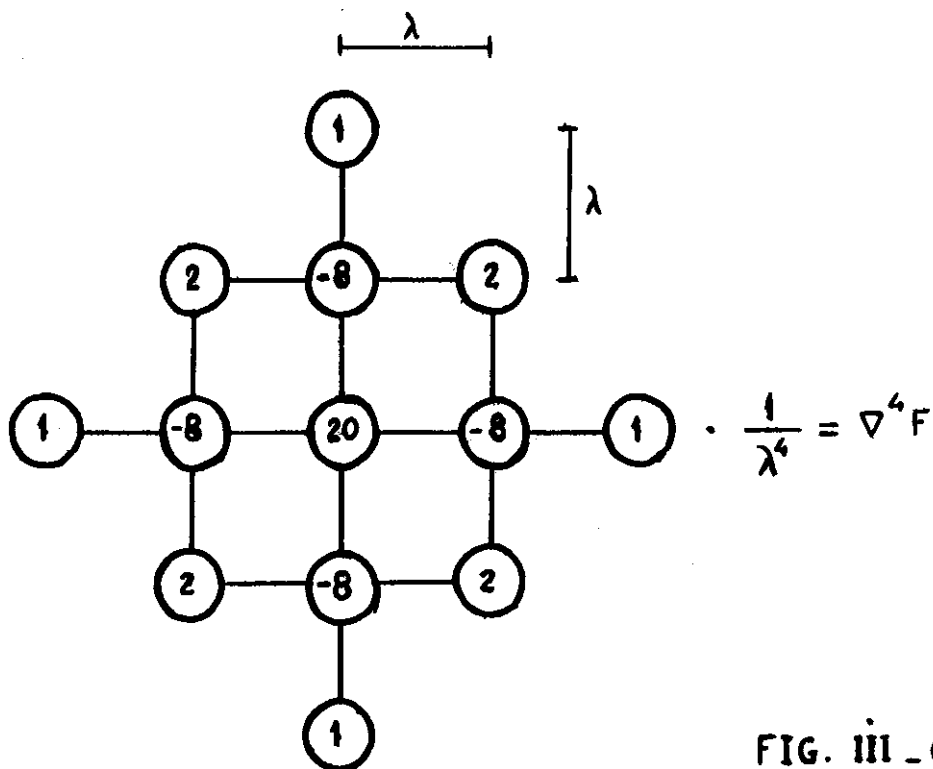


FIG. III - 6

CAPÍTULO IV - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

4.1. Considerações gerais.

São apresentadas considerações relativas aos elementos empregados na análise das placas e das chapas pelo sistema de linguagem "LORANE LINEAR" para análise estrutural por computador o qual se encontra nos arquivos da COPPE/UFRJ.

4.2. Conceituação. Elementos utilizados. Hipótese.

A essência do método consiste em substituir uma estrutura contínua por um modelo formado de elementos estruturais, unidos entre si através de um número finito de pontos. Estes são os pontos nodais. Para o elemento estrutural, admite-se ser possível conhecer o seu comportamento a partir dos deslocamentos ou das forças nodais. Os elementos, dependendo do tipo de problema, podem ser de uma, duas ou três dimensões, com formas geométricas variadas. O que o caracteriza é sua forma geométrica, o número e tipo dos deslocamentos nodais, grau da expressão polinomial, que representa a lei de variação do campo dos deslocamentos e a técnica utilizada na obtenção da matriz de rigidez dos elementos (uma matriz pode ser formada por matrizes de sub-elementos).

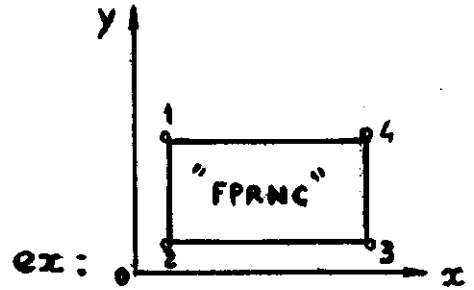
A escolha da lei de variação do campo dos deslocamentos é a parte mais delicada e importante do método. Na flexão das placas o campo dos deslocamentos refere-se ao deslocamento transversal "w" e os demais são obtidos por derivação de w.

O elemento que utilizamos para análise das placas pelo programa em linguagem Lorane Linear foi do tipo retangular não conforme, este o único elemento disponível atualmente implementado no sistema.

Descrição do Elemento:

Elemento Retangular Não Conforme:

Nome: "FPRNC"



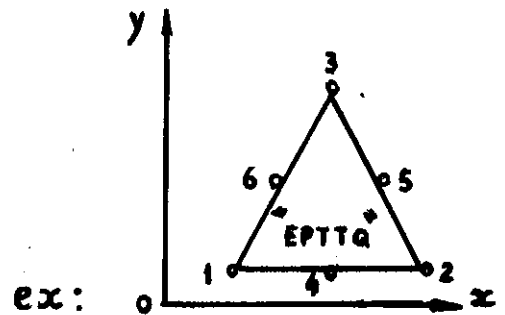
Características Básicas: Elemento retangular de quatro nós, colocados nos seus vértices, e possuindo três incógnitas nodais por vértice ("W", "RV", "RU"), totalizando doze deslocamentos nodais. A implementação deste elemento é baseada em uma variação tipo polinômio incompleto de quarta ordem para o deslocamento transversal "W".

Não existindo compatibilidade inter-elemento para as pendentes normais aos lados do elemento, o mesmo resulta ser de tipo não conforme.

Para a análise das chapas o elemento utilizado do sistema Lorane Linear é do tipo triangular de segunda ordem e sua implementação foi baseada no modelo compatível ou de deslocamentos. A descrição deste elemento é feita a seguir.

Elemento Triangular de Segunda Ordem:

Nome: "EPTTQ"



Características Básicas: Possui seis pontos nodais, três nos vértices e outros três nos pontos médios dos lados. A sua formulação se baseia numa variação quadrática para os deslocamentos, do que resulta uma variação linear para as deformações específicas e para as tensões sobre o elemento. Este elemento possui duas incógnitas nodais para cada ponto, totalizando doze incógnitas que correspondem aos deslocamentos lineares "U" e "V".

O sistema Lorane Linear foi implementado para calcular as solicitações nos nós de cada elemento.

A solicitação em um ponto nodal será a média das solicitações dos nós dos elementos que nele concorrem. O sistema Lorane não calcula internamente essa média, o que foi feito manualmente neste trabalho.

4.3. Critérios de convergência.

Para que a solução obtida com o método dos elementos finitos convirja para a solução exata com o refinamento da malha, o campo de deslocamento assumido deve satisfazer às seguintes condições, denominadas critérios de convergência:

- a) O campo dos deslocamentos escolhido deve ser tal que não haja deformação do elemento quando os deslocamentos nodais são de corpo rígido.
- b) O campo dos deslocamentos deve ser tal que se os deslocamentos nodais são compatíveis com uma condição de deformação unitária constante, esta deformação unitária seja a partir do campo dos deslocamentos.

Para que os critérios sejam satisfeitos, o campo de deslocamentos assumido deve ser no mínimo um polinômio completo de grau igual à ordem de derivação para o cálculo das deformações.

No caso de placas, considera-se como deformações unitárias as curvaturas, que são expressas como derivadas segunda de "W". Assim o campo de deslocamento assumido deve ser no mínimo um polinômio do 2º grau. É bom salientar que a obediência desses dois critérios não garante a convergência para a solução exata com o refinamento da malha, isto é, os critérios são condições de necessidade mas não são de suficiência.

A convergência para solução exata é garantida desde que além de serem satisfeitos os critérios de convergência, sejam também os de conformidade. As condições de conformidade referem-se a compatibilidade completa de deslocamentos ao longo de um lado comum a dois elementos adjacentes. No caso de flexão de placas, a compatibilidade refere-se não só aos deslocamentos transversais "W", mas também as inclinações ao longo de um lado comum a dois elementos.

Elementos não conformes podem convergir para a solução exata desde que as derivadas terceiras permaneçam contínuas e limitadas à medida que o tamanho da malha diminua. Esta condição que substitui a de não conformidade foi demonstrada teoricamente pelo Prof. Arantes e Oliveira. Foi utilizado na comparação o elemento não conforme para flexão de placas².

CAPÍTULO V - RESOLUÇÃO NUMÉRICA

5.1. Fixação das condições de contorno, por diferenças finitas.

5.1.1. Placas. Condições de contorno.

Primeiramente abordaremos o caso de flexão das placas. Consideremos a seguinte malha, a qual pode ser lançada sobre a superfície de uma placa, fig(V-1).

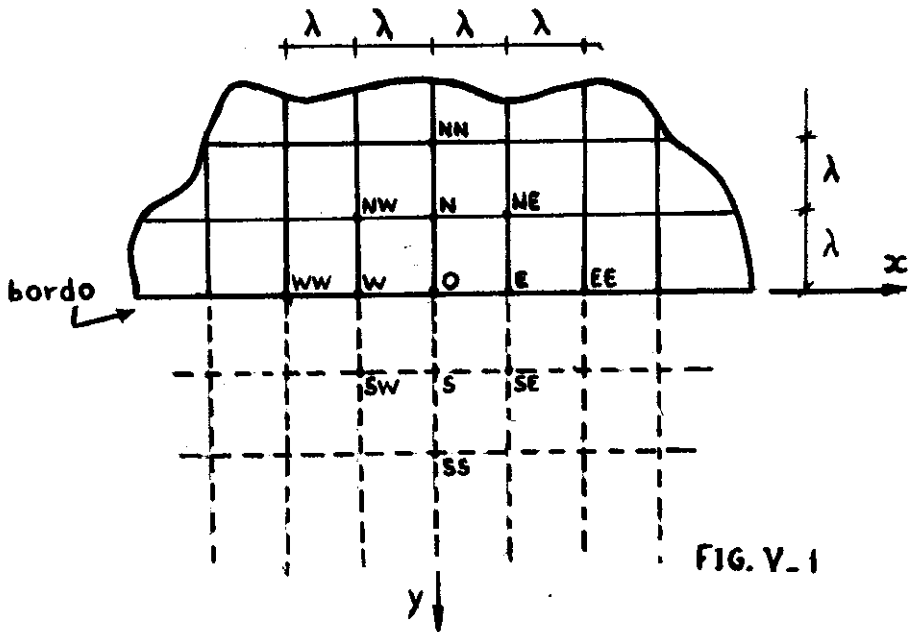


FIG. V-1

As condições de contorno a serem consideradas neste trabalho correspondem aquelas necessárias aos exemplos analisados. No Capítulo I, ítem 1.5., foram estudadas todas as condições de contorno de interesse para nós, vejamos em termos de diferenças finitas como estas podem ser expressas:

Tendo em vista a Fig. (V-1) em que vemos o bordo $y = \text{cte} = 0$ de uma placa, as condições de bordo específicas para cada caso serão:

- Bordo Engastado ($y = 0$); no ponto 0:

$$W_o = 0$$

$$W_s - W_n = 0 \quad \text{ou} \quad W_s = W_n$$

- Bordo simplesmente apoiado ($y = \text{cte} = 0$), no ponto 0:

$$-(2+2\mu)W_o + W_n + W_s + \mu(W_w + W_e) = 0 \quad \text{e} \quad W_o = 0$$

como; $W_o = W_w = W_e = 0$, as condições resultam.

$$W_s = -W_n$$

$$W_o = 0$$

- Bordo Livre ($y = \text{cte} = 0$); ponto 0:

$$-(2+2\mu)W_o + W_n + W_s + \mu(W_w + W_e) = 0$$

$$(6-2\mu)(W_n - W_s) + (2-\mu)(W_{se} + W_{sw} - W_{nw} - W_{ne}) - W_{nn} + W_{ss} =$$

$$= - \frac{2\lambda^3}{D} (R_y)_o \quad (\text{caso não haja força no bordo } (R_y)_o = 0)$$

- Canto Livre ($y = \text{cte} = 0, x = 0$); ponto 0

$$W_e - 2W_o + W_w = 0$$

$$W_s - 2W_o + W_n = 0$$

$$\begin{aligned} & (6-2\mu)(W_w - W_e) + (2-\mu)(W_{ne} + W_{se} - W_{nw} - W_{sw}) - W_{ww} + W_{ee} = \\ & = \frac{2\lambda^3 (R_x)_o}{D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (6-2\mu)(W_n - W_s) + (2-\mu)(W_{se} + W_{sw} - W_{nw} - W_{ne}) - W_{nn} + W_{ss} = \\ & = - \frac{2\lambda^3 (R_y)_o}{D} \end{aligned}$$

$$W_{se} - W_{ne} - W_{sw} + W_{nw} = \frac{2\lambda^2 (R)_o}{D(1-\mu)}$$

(caso não haja forças no canto; $(R_x)_o = (R_y)_o = (R)_o = 0$).

5.1.2: Chapas. Condições de contôrno.

- Pontos de Contôrno

A teoria é suficientemente explícita no tocante aos pontos do contôrno. A situação nova que se apresenta é a presença

de contornos internos (orifícios), o que não aparece usualmente nos problemas resolvidos na literatura. A assimilação do contôrno a uma viga em balanço é perfeita e pode ser facilmente constatada na fig(V-2) e no exame da equação (II-12).

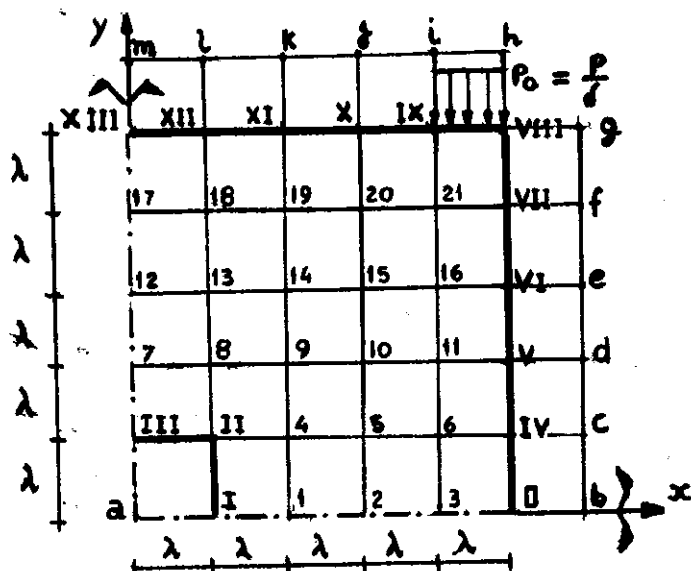


FIG. V-2

A origem escolhida, será ditada pela simetria e conveniência do problema específico. Como já se sabe, a origem é arbitrária(ver capítulo II, ítem 2-4). Como as tensões são dadas em função das derivadas segundas de Φ , esta escolha arbitrária não as afetará para os pontos do contorno, qualquer que seja a origem escolhida.

Dada a simetria total de carregamento, vinculação e forma, pode-se adotar apenas a quarta parte da chapa analisada, para se conhecer a plenitude de seu comportamento.

Os pontos do contorno receberão uma notação diferente da dos internos(ver ex. da fig.(V-2), justamente para os diferenciar. Serão anotados em algarismos romanos, enquanto os internos o serão em arábicos.

A origem escolhida é "0", e o caminhamento será da direita para a esquerda, conforme convenção adota na teoria.

O contôrno sendo assimilável a uma viga em balanço, fará com que o sinal do momento seja o mesmo, em qualquer dos dois sentidos.

Relembremos que os espaçamentos entre os pontos da borda superior, como de toda a chapa são iguais entre si, pois, a malha é regular e tem um valor igual a " λ ".

Conhecidas estas preliminares e munidos da equação (II 12), pode-se calcular os valores de Φ no contôrno.

Pontos sobre o contôrno externo:

Da equação (II-12) o valor de Φ para pontos do contôrno da peça vale: $\Phi = M_p + Ax + By + C$, como se trata de pontos sobre o contôrno externo o fator linear ($A_x + B_y + C$) é assumido nulo como nos domínios simplesmente conexos; então Φ reduz-se a $\Phi = M_p$ (momento de todas as forças de contôrno compreendidas entre os pontos 0 e XIII na fig. (V-2)). Sabendo-se que o carregamento, por ser vertical, não admitirá componente horizontal, tem se:

$$\Phi = (M_y)_p = \text{(momento de todas as forças de contôrno de direção } y, \text{ existentes no trecho } 0 \overset{\rightarrow}{\text{XIII}}).$$

Como "P" é igual a força por unidade de comprimento de

finido no capítulo II, os valores de Φ nos pontos do contorno externo serão; pelo sentido do caminhamento indicado na fig. (V-4) iguais a:

$$\Phi_0 = \Phi_{IV} = \Phi_V = \Phi_{VI} = \Phi_{VII} = \Phi_{VIII} = 0$$

$$\Phi_{IX} = -P \frac{\lambda^2}{2} \quad ; \quad \Phi_X = - \frac{3}{2} P \cdot \lambda^2 \quad ; \quad \Phi_{XI} = - \frac{5}{2} P \lambda^2 \quad ;$$

$$\Phi_{XII} = - \frac{7}{2} P \lambda^2$$

$$\text{e} \quad \Phi_{XIII} = - \frac{9}{2} P \lambda^2$$

Pontos sobre o contorno interno

No contorno interno, $\Phi = M_p + AX + BY + C$, porém como o contorno está descarregado $M_p = 0$ e Φ resultará uma função linear de x, y , no entanto pela dupla simetria não poderemos ter os termos antissimétricos AX e BY , então $\Phi = C$ será uma constante ao longo do contorno interno da chapa, vista na figura (V-2).

Pontos externos

Na geração das equações, quando da aplicação da molécula geradora bi-harmônica ($\nabla^4 \Phi = 0$), aos pontos internos adjacentes aos contornos, nota-se a necessidade de definir alguns pontos fora do contorno, portanto externos, também chamados fictícios, ver fig(V-2). Será necessário estabelecer uma ligação entre estes pontos e os demais pontos do sistema, por

exemplo os internos. Isto será possível através das equações (II-10) e (II-11), que representam as derivadas de $\Phi(x,y)$ no bordo.

Vejamos:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_p = -Q_y + A \text{ e } \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q_x + B.$$

Observamos que as derivadas de Φ apresentam os fatores constantes A e B respectivamente, o que diferencia do caso dos domínios simplesmente conexos, em que esses fatores são nulos.

Como vimos na teoria (CAP.II), no contorno externo da chapa as constantes de contorno podem ser tomadas nulas (como nos domínios simplesmente conexos), sem alterar o estado de tensão da chapa; teremos pois, para as derivadas de Φ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -Q_y \text{ e } \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q_x, \text{ como o contorno lateral externo da chapa está livre de esforços, } Q_y = Q_x = 0.$$

Substituindo as derivadas pela diferença finita central de acôrdo com (III-8) e (III-11).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \text{ (para todos os pontos do contorno lateral (de 0 até VIII), o mesmo ocorre para } \frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ que também é nula nestes pontos.)}$$

então:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 = \frac{\Phi_b - \Phi_3}{2\lambda} = 0 \therefore \Phi_b = \Phi_3$$

Analogamente:

$$\Phi_c = \Phi_6 ; \Phi_d = \Phi_{11} ; \Phi_e = \Phi_{16} ; \Phi_f = \Phi_{21} ; \Phi_g = \Phi_{IX}$$

Para a derivada $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$; como Φ neste contorno é constante e nula esta condição é automaticamente satisfeita.

Caso semelhante ocorre no bordo superior, em que a condição $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ (pois não há força de bordo na direção x) nos dá:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{XIII} = \frac{\Phi_m - \Phi_{17}}{2\lambda} = 0 \therefore \Phi_m = \Phi_{17}$$

Analogamente para os demais pontos teremos:

$$\Phi_l = \Phi_{18} ; \Phi_k = \Phi_{19} ; \Phi_j = \Phi_{20} ; \Phi_i = \Phi_{21} \text{ e}$$

$$\Phi_h = \Phi_{VII} = 0$$

A derivada $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ neste bordo, terá um valor constante e igual a força de bordo na direção "Y" ou seja $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -Q_y = p\lambda$

então:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{IX \text{ até } XIII} = p\lambda$$

Substituindo a derivada 1^a pela diferença finita em avanço, notaremos que esta condição é satisfeita identicamente em todos os pontos; como exemplo vejamos para o ponto XIII.

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{XIII} = \frac{\Phi_{XII} - \Phi_{XIII}}{\lambda} = \frac{-\frac{7}{2}p\lambda^2 - (-\frac{9}{2}p\lambda^2)}{\lambda} = p\lambda$$

Pontos externos ao contorno interno:

Do mesmo modo como tratamos os pontos externos para os bordos exteriores, o faremos aqui. Como o contorno está descarregado $Q_y = Q_x = 0$; então $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = A$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = B$ para todos os pontos do contorno (I até III).

Pela dupla simetria já vimos que as constantes A e B são nulas, e estas condições se reduzem a $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ em todos os pontos do contorno interno fig.(V-2). Substituindo pelas diferenças finitas. Teremos pois:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_I = \frac{\Phi_1 - \Phi_a}{2\lambda} = 0 \therefore \Phi_{a_x} = \Phi_1$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{III} = \frac{\Phi_7 - \Phi_a}{2\lambda} = 0 \therefore \Phi_{a_y} = \Phi_7$$

As demais são satisfeitas identicamente, se substituírmos as derivadas primeiras por suas expressões em diferenças finitas em atraso, respectivamente.

No contorno interno, como vimos a única constante não nula é C, pois pela dupla simetria não poderíamos ter os termos antissimétricos AX e BY. Uma nova equação teremos que obter para esta constante, ela vem através da condição de unicidade dos deslocamentos. Para decidirmos quais das três condições; (II-18), (II-19), ou (II-20) a usar, é necessário observar qual delas é essencial e quais já são satisfeitas automaticamente, face à simetria do problema.

Observamos que os deslocamentos u e v são funções antissimétricas de x,y em todo o domínio e, em particular, no contorno interno. Desta forma, as integrais de contorno destas funções serão nulas, quando estendidas ao longo de todo o contorno interno. A condição essencial, em nosso caso no ex. da fig.(V-2), é pois (II-20), uma vez que tanto $\frac{\partial u}{\partial y}$ como $\frac{\partial v}{\partial x}$ são funções simétricas em relação a x,y. Basta que consideremos apenas um quadrante, tomando, por exemplo, a primeira das (II-20). Vemos que nesta expressão todos os fatores que contêm v são nulos.

Assim;

$$\oint \left[\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} - \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right) dx - \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right) dy \right] = 0,$$

terá os termos:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = 0, \text{ para } y = \text{cte.}, \text{ caso o con}$$

torno esteja descarregado, pois então Φ é uma função linear de x, y .

O mesmo diga-se a respeito de :

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ para } x = \text{cte.}$$

A primeira das (II-20) reduz-se, assim a:

$$\oint \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} dx - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} dy \right] = 0,$$

esta condição será traduzida em diferenças finitas, sendo a tarefa facilitada pelo fato de no trecho III - II, $dy = 0$ e no trecho II - I, $dx = 0$.

Para situarmo-nos o mais possível dentro do domínio, é conveniente, na formação das derivadas terceiras, considerarmos as diferenças em avanço das derivadas segundas. Por exemplo, pa

ra o ponto I da figura (V-2) tomaríamos:

$$\left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right]_I = \frac{\frac{\Phi_2 - 2\Phi_I + \Phi_I}{\lambda^2} - \frac{\Phi_1 - 2\Phi_I + \Phi_a}{\lambda^2}}{\lambda}$$

Eliminando todos os pontos fora do domínio, em função dos pontos do domínio, a integral de contorno será substituída por:

$$\Sigma \left[\left(\left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \right]_{III} + \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \right]_{II} \right) \cdot \lambda - \left(\left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right]_{II} + \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right]_I \right) \cdot \lambda \right] =$$

= 0, substituindo as derivadas 3^a por diferenças finitas como feito acima e feitos os cálculos teremos:

$$4\Phi_1 - \Phi_2 + 3\Phi_4 - \Phi_5 - 4\Phi_7 - 3\Phi_8 + \Phi_{12} + \Phi_{13} = 0$$

5.2. Montagem das equações lineares. Aplicação dos operadores dispostos em moléculas.

5.2.1. Placas:

Vimos que "W₀" é a deflexão de um ponto sobre bordo da placa, e aparece em cada uma das condições de bordo; é evidente que muitas das deflexões indicadas são fictícias. Para indicar o procedimento usado para expressar estas deflexões fictícias em

termos de deflexões reais, consideremos novamente o esboço da fig.(V-I), tendo em vista o exemplo de um ponto "O" sobre o bordo onde $Y = \text{cte}$; podemos ver claramente, que existem sempre quatro pontos de deflexões fictícias, na equação para força de bordo. As deflexões fictícias são W_{sw} , W_s , W_{se} e W_{ss} .

Estas deflexões fictícias podem ser avaliadas em termos de deflexões da placa, de modo que a equação para um ponto "O" do bordo livre pode ser determinada em função dos valores de pontos sobre a superfície real da placa.

Assim as quatro quantidades serão eliminadas, para isto cinco condições são especificadas ao longo do bordo livre $y = \text{cte}$, no ponto "O" da fig. (V-1).

Estas são:

1. Equação de Lagrange (para um carregamento P_o):

Aplicando o operador $\nabla^4 W$ em diferenças finitas, obtido no CAP. III, obteremos para o ponto "O":

$$20W_o - 8(W_n + W_e + W_s + W_w) + 2(W_{nw} + W_{ne} + W_{se} + W_{sw}) + W_{ww} + W_{nn} + W_{ee} + W_{ss} = \frac{P_o \lambda^4}{D}$$

2. Força de bordo:

$$\begin{aligned} (6-2\mu)(W_n - W_s) + (2-\mu)(W_{se} + W_{sw} - W_{nw} - W_{ne}) - W_{nn} + W_{ss} = \\ = \frac{2\lambda^3 (R_y)_o}{D} \end{aligned}$$

(se não há força de bordo $(R_y)_o = 0$)

3a. Momento fletor em "0":

$$W_s - (2+2\mu)W_o + W_n + \mu(W_w + W_e) = 0$$

3b. Momento em "W":

$$-(2+2\mu)W_w + W_{nw} + W_{sw} + \mu(W_{ww} + W_o) = 0$$

3c. Momento em "E":

$$-(2+2\mu)W_e + W_{ne} + W_{se} + \mu(W_{ee} + W_o) = 0$$

Eliminando W_{ss} , W_{sw} , W_{se} e W_s destas equações chegamos a equação para o ponto "0" do bordo livre da placa.

$$\begin{aligned} (16-8\mu-6\mu^2)W_o + (-12+4\mu)W_n + (-8+4\mu+4\mu^2)(W_w + W_e) + \\ + (4-2\mu)(W_{ne} + W_{nw}) + (1-\mu^2)(W_{ww} + W_{ee}) + 2W_{nn} = \\ = \frac{P_o \lambda^4}{D} + \frac{2\lambda^3 (R_y)_o}{D} \end{aligned}$$

Esta equação, para este ponto do bordo livre pode ser esquematicamente representada. Este procedimento foi seguido para todos os pontos típicos das diversas placas analisadas neste trabalho, e as várias quantidades foram avaliadas para $\mu = 0.30$. O resultado dos coeficientes padrões em forma de molécula para estes pontos típicos encontram-se na fig. (V-3).

Estes operadores em forma de molécula foram aplicados aos diversos pontos típicos das placas analisadas; como foi mostrado eles já incluem as condições de contorno para cada caso (pontos sobre os bordos ou próximos a eles), exceto para os pontos internos distantes dos bordos em que o operador aplicado, resume-se ao operador usual de 4ª ordem de Lagrange (sem as condições de contorno).

Aplicado estes operadores aos pontos internos da placa (inclusive aqueles pertencentes ao bordo livre), montaremos um sistema de equações lineares, em que cada equação corresponde a um ponto interno da placa contendo as deflexões, incógnitas do nosso problema, vejamos:

$$\nabla^4 W = \frac{P}{D} \Rightarrow \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \{W\} = \{P\}, \text{ onde:}$$

A matriz quadrada $|A|$ é a matriz dos coeficientes, formada pelos coeficientes do sistema de equações lineares, sua ordem depende do número de pontos internos, ou pontos nodais da malha que cobre a placa.

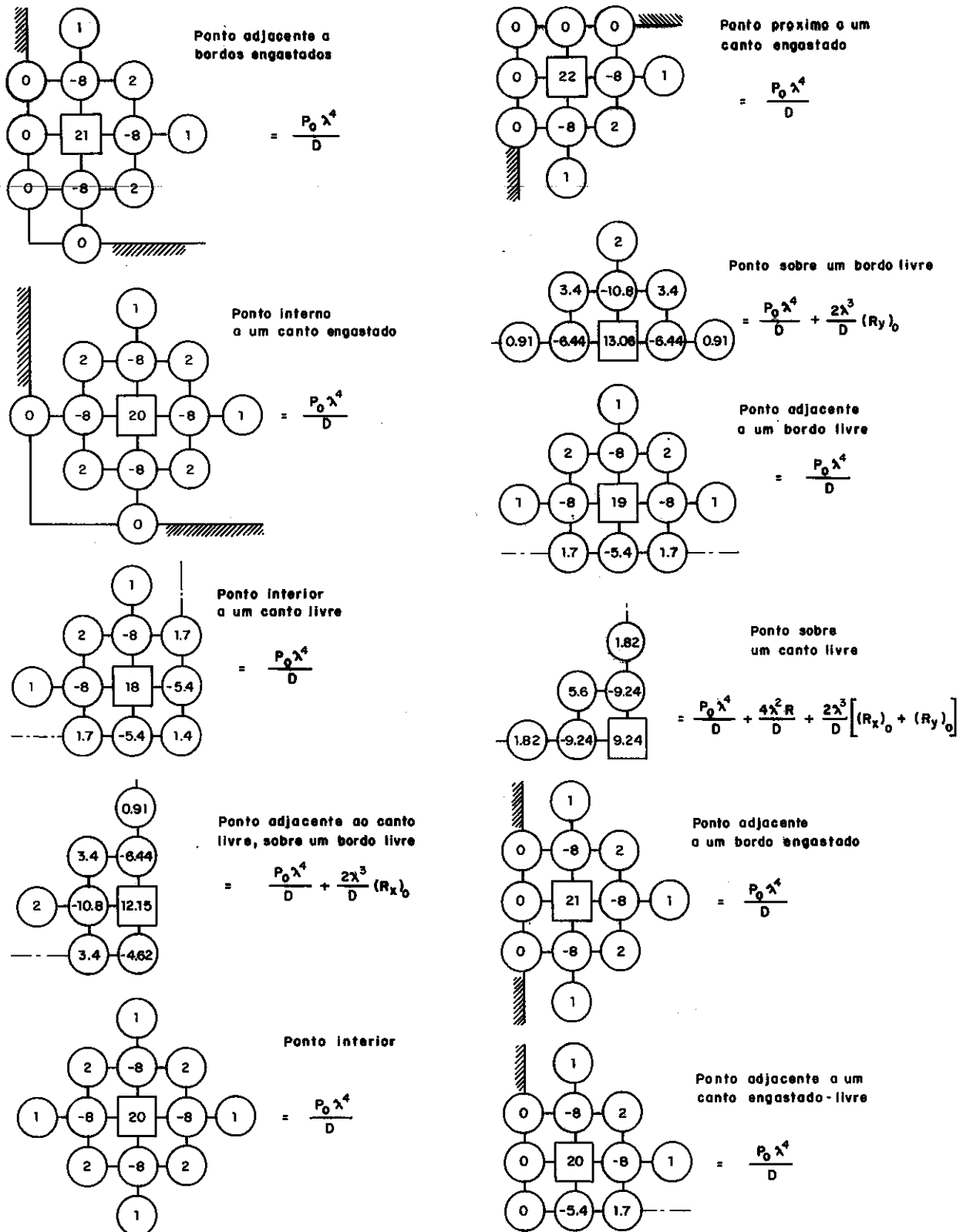
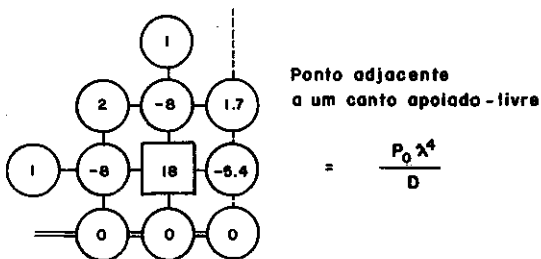
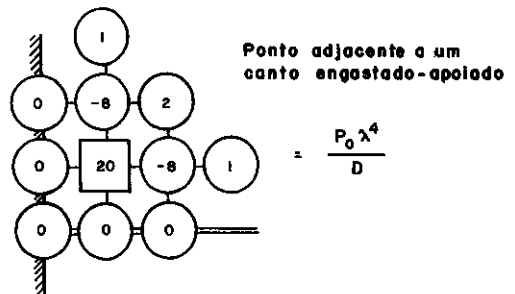
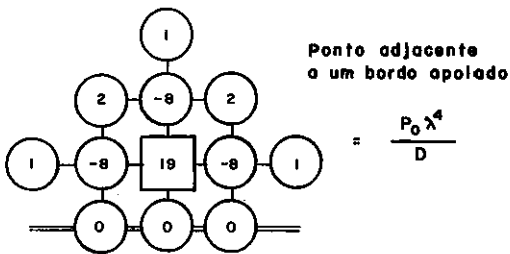
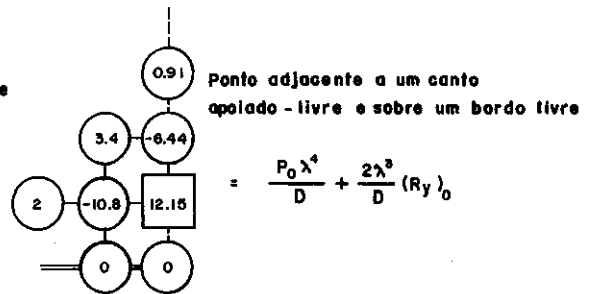
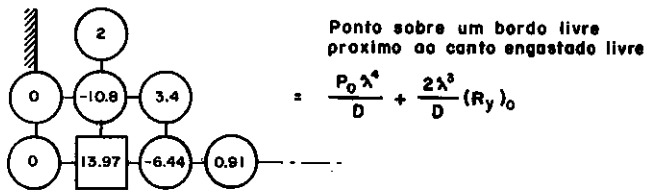


FIG. (V.3) - Coeficientes moleculares típicos, das equações em dif. finitas p/ as deflexões ($\lambda = 0.30$).



O vetor $\{W\}$, representa o nosso vetor de deflexões incógnitas, correspondente a cada ponto interno da placa.

O vetor $\{P\}$ é o vetor de carga ou de termos independentes e equivale ao valor da ordenada de carga correspondente a cada ponto interno da placa (para um carregamento normal distribuído, se houver).

5.2.2. Chapas:

No caso da análise das chapas, a montagem do sistema de equações é análoga aquela feita com as placas.

Aplicado o operador bi-harmônico aos pontos internos da chapa, eliminando os pontos externos fictícios através das condições de contorno estudadas anteriormente e completando o sistema com as condições de unicidade de deslocamentos essenciais, teremos o seguinte aspecto para o sistema na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \{\Phi\} = \{P\} \quad \Rightarrow \quad \nabla^4 \Phi = 0$$

Em que a matriz $|A|$ quadrada, representa os coeficientes dos termos lineares do sistema de equações.

O vetor $\{\Phi\}$, representa o vetor de incógnitas que corresponde a função de tensões nos pontos internos da chapa.

O vetor $\{P\}$, representa o vetor de carga ou melhor, o vetor de termos independentes, é formado pela passagem dos termos independentes das equações para o lado direito do sinal de igualdade.

Como podemos observar a montagem do sistema de equações lineares é relativamente simples, embora esta, seja uma tarefa um tanto trabalhosa sem o auxílio de um computador eletrônico. Esta etapa deste trabalho não foi automatizada, devido a grande generalidade das estruturas analisadas (condições de bordo e carregamento).

5.3. Resolução do sistema global:

Após a montagem do sistema de equações estudado no item anterior, passemos a sua resolução. Este foi resolvido no sistema Burroughs seis mil e setecentos (B-6700), instalada no núcleo de computação eletrônica da COPPE/UFRJ.

A implementação do sistema de equações lineares fundamentou-se no Método de Eliminação de Gauss, introduzindo-se alguns comandos de entrada e saída relativos ao problema específico, utilizou-se a matriz completa total, devido a grande dispersão dos seus coeficientes.

De posse da solução, valores das deflexões (para as placas) ou das funções de tensões (para as chapas) nos pontos nodais da malha lançada sobre a estrutura, todas as demais grande-

zas essenciais a análise ficam conhecidas. Nosso próximo passo será o cálculo dessas grandezas, os esforços nas placas e tensões nas chapas.

5.4. Operadores para o cálculo dos esforços nas placas e das tensões nas chapas.

5.4.1. Placas.

Após o primeiro passo (resolução do sistema) dispomos dos deslocamentos transversais "W" em todos os pontos da malha. Podemos então, através dos operadores em forma de moléculas calcular, nos mesmos pontos, os seguintes esforços: momentos fletores em x em y e momento de torção x-y.

Os momentos fletores e de torção podem ser obtidos como funções das derivadas segundas de "W", conforme as equações (I-15), (I-16) e (I.17). Estas transformadas em diferenças finitas centrais para os diversos pontos típicos das placas analisadas, encontram-se dispostas como operadores em forma de moléculas, e são vistas nas figuras (V-4).

Equações de Momentos:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{Eq. (I-15)}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{Eq. (I-16)}$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{Eq. (I-17)}$$

Equações de momentos em diferenças finitas; ponto "0" fig.(V-4):

$$(M_x)_0 = \frac{-D}{\lambda^2} \left[-(2+2\nu)W_0 + W_w + W_e + \nu(W_n + W_s) \right]$$

$$(M_y)_0 = \frac{-D}{\lambda^2} \left[-(2+2\nu)W_0 + W_n + W_s + \nu(W_w + W_e) \right]$$

$$(M_{xy})_0 = \frac{D(1-\nu)}{4\lambda^2} (W_{se} - W_{ne} - W_{sw} + W_{nw})$$

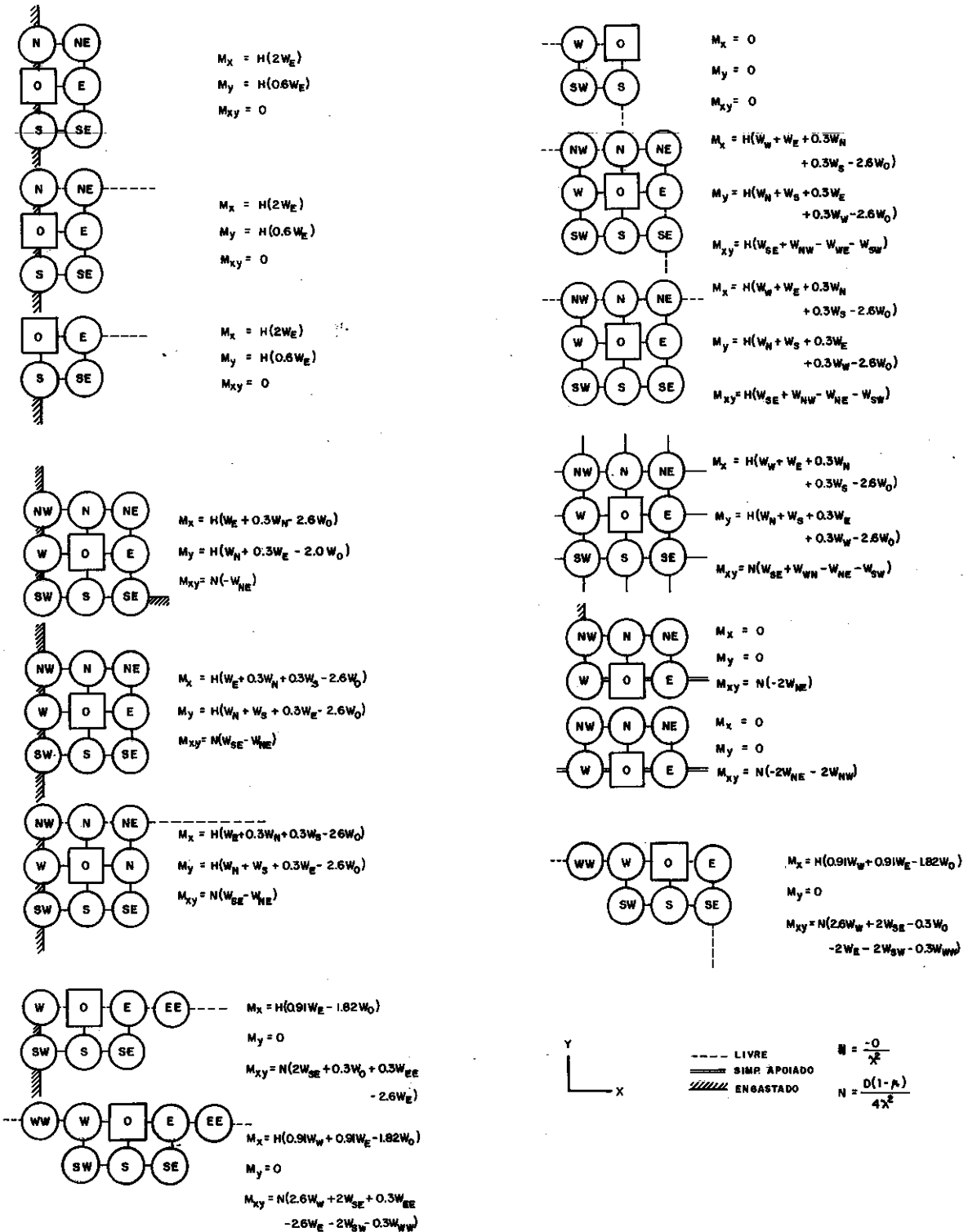


FIG. (V.4) - Equações de dif. finitas típicas para momento ($\mu = 0.30$).

5.4.2. Chapas:

Na análise de chapas, após a resolução do sistema de equações lineares (1º passo), obtemos os valores da função de tensões Φ em todos os pontos da malha. A partir das equações (I-1), (I-2) e (I-3) podemos obter as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} . Para isto traduziremos as equações (I-1), (I-2) e (I-3) em diferenças finitas, colocando-as como operadores em forma de molécula para diversos pontos típicos da chapa.

Equações para cálculo das tensões:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (\text{tensão normal na direção } x) \quad \text{Eq. (I-1)}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (\text{tensão normal na direção } y) \quad \text{Eq. (I-2)}$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (\text{tensão de cisalhamento}) \quad \text{Eq. (I-3)}$$

Operadores das tensões em diferenças finitas, ponto "O" fig. (V-5)

$$\sigma_x = \frac{1}{\lambda^2} (\Phi_n - 2\Phi_o + \Phi_s)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\lambda^2} (\Phi_w - 2\Phi_o + \Phi_e)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{1}{4\lambda^2} (\Phi_{ne} - \Phi_{se} + \Phi_{sw} - \Phi_{nw})$$

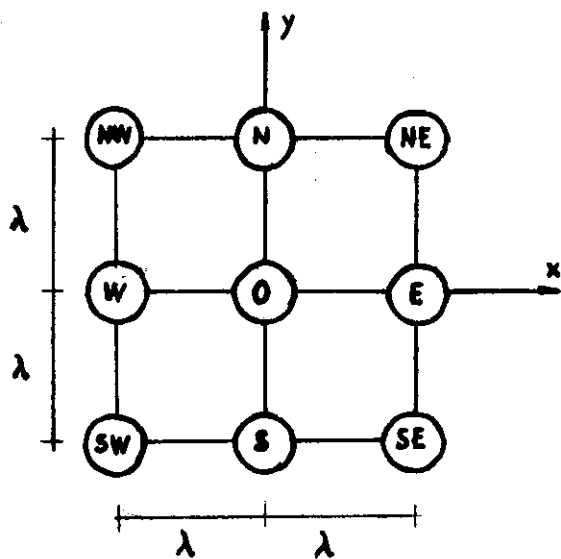
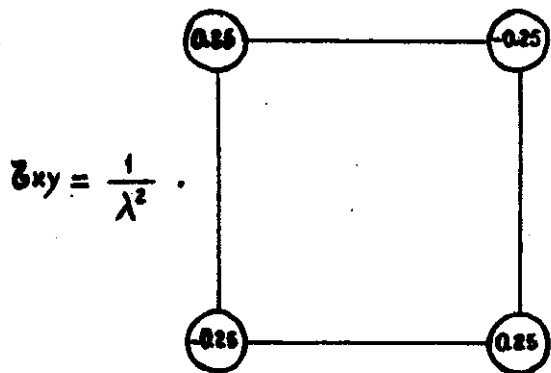
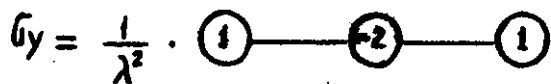
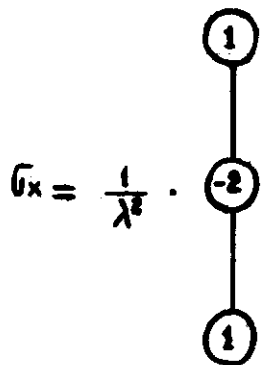


FIG. V-5

CAPÍTULO VI - ANÁLISE DOS RESULTADOS. TABELAS, GRÁFICOS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES:

6.1. Estruturas analisadas

Apresentamos neste capítulo as características das estruturas analisadas (placas e chapas), os resultados obtidos e as respectivas conclusões.

Ilustramos com tabelas e gráficos, para uma melhor interpretação dos resultados.

As estruturas analisadas dividem-se em dois grupos; placas e chapas.

Primeiro grupo: Foram analisadas quatro placas, as três primeiras quadradas com um orifício quadrado no centro, variando apenas as condições de vinculação do contorno externo; a primeira engastada nos quatro bordos, a segunda simplesmente apoiada nos quatro bordos e a terceira engastada em dois bordos opostos e simplesmente apoiada nos outros dois. A quarta placa com características diferentes das demais é do tipo contraforte ou escora de proteção, utilizada em pontes, para conter a pressão do solo.

Características:

a) Placa I, b) Placa II, c) Placa III.

Carregamento uniformemente distribuído: $1. \text{ tf/m}^2$.

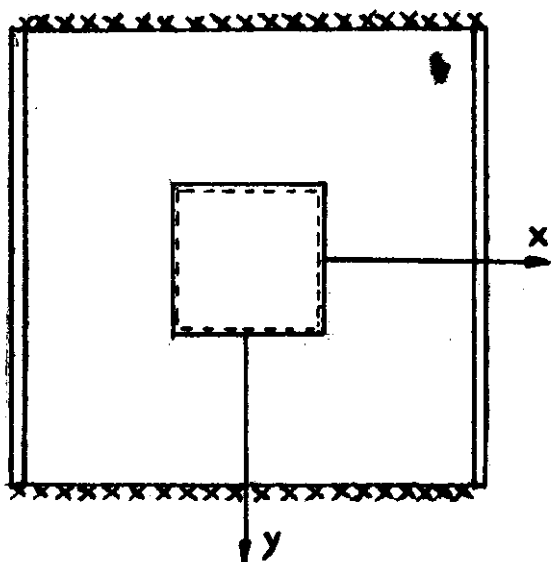
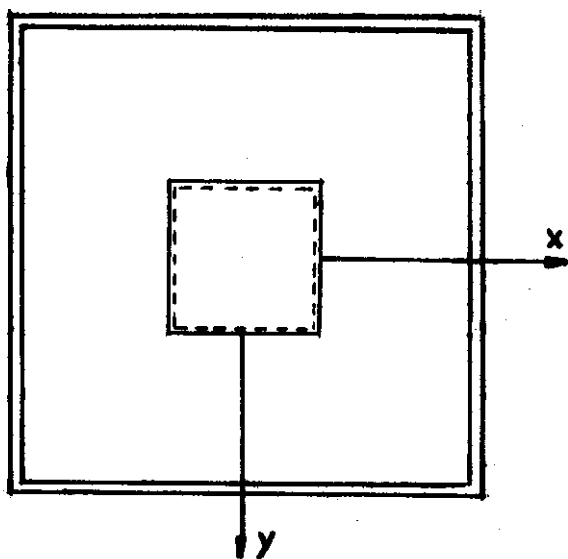
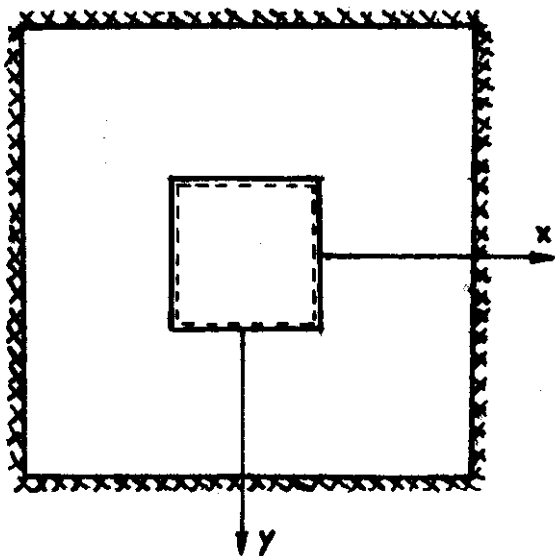
Módulo de elasticidade longitudinal: $2,1 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$.

Coeficiente de Poisson: 0.30

Espessura constante: 0.10m.

Dimensões externas: 6m x 6m.

Dimensões do orifício: 2m x 2m.



Como último exemplo do 1º grupo, apresentamos isoladamente a placa IV, cujas características são completamente distintas das demais e cujos resultados teóricos por diferenças finitas são comparados com resultados experimentais realizados na IOWA ENGINEERING EXPERIMENT STATION e encontradas na literatura (The Iowa State College Bulletin). Por esta razão incluímos neste trabalho este tipo de placa, do qual faremos uma análise mais detalhada.

Detalhe da placa IV:

Esta placa pode ser considerada como semelhante a um elemento estrutural de pontes, trabalhando a flexão como contraforte ou parede de escora para proteção contra a pressão do solo. figura (VI-2).

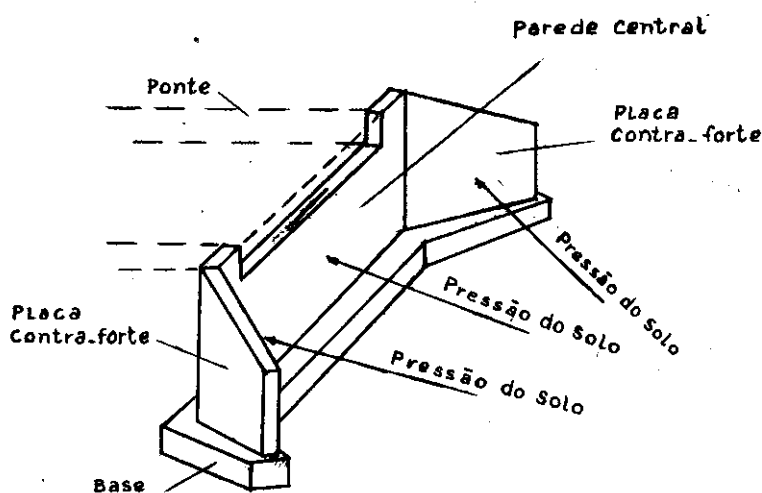
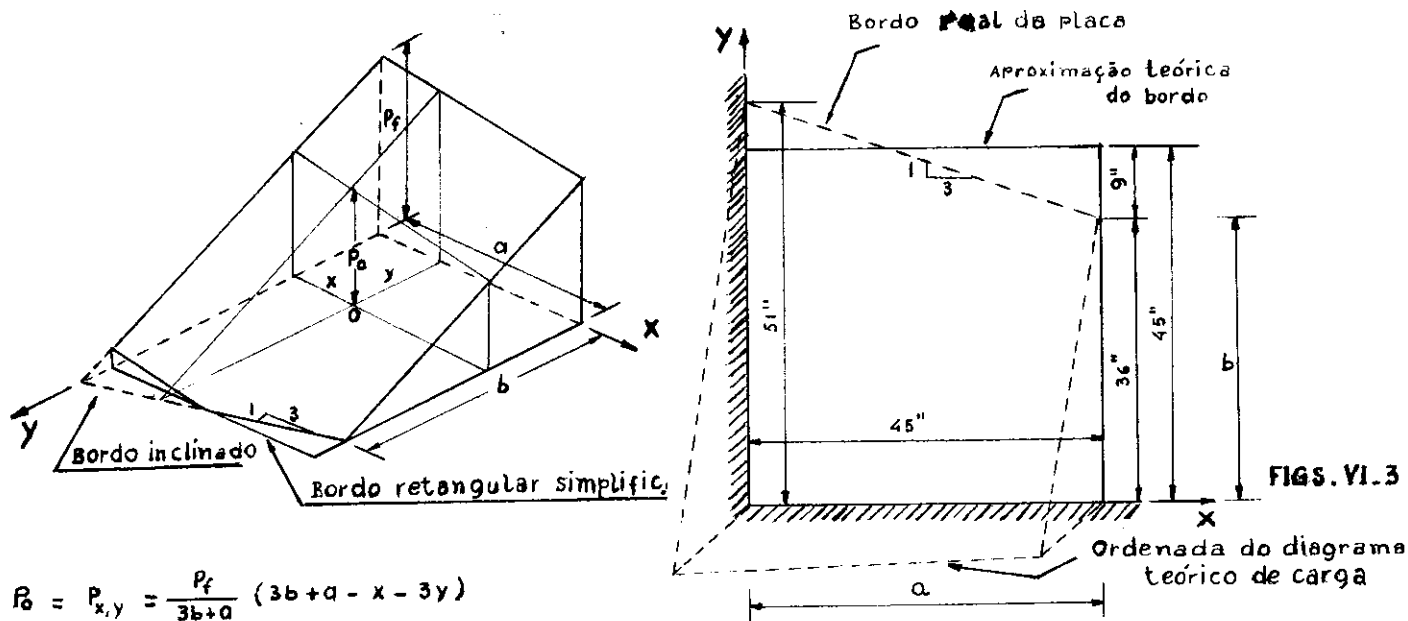


FIG.VI-2

O projeto estrutural desta placa foi idealizado, como ve
mos nas figs. (VI-3).



$$R_0 = P_{x,y} = \frac{P_f}{3b+a} (3b+a - x - 3y)$$

A aproximação teórica do bordo livre desta placa, deve-se ao fato de podermos trabalhar sempre com malhas retangulares (neste caso quadrada) nas equações por diferenças finitas. Caso utilizássemos do bordo real inclinado, as equações por diferenças finitas teriam que ser ajustadas para malhas triangulares ou oblíquas, o que tornaria por certo o trabalho numérico bastante volumoso.

Esta simplificação facilitou grandemente a aplicação do método das diferenças finitas em que a placa ficou teoricamente como quadrada (neste caso), em vez daquela inicialmente trapezoidal

Soluções foram obtidas de um sistema de equações lineares resultante da aplicação do método das diferenças finitas para malhas quadradas como por exemplo: 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7.

Características da placa IV:

Carregamento triangular distribuído: $P_o = P_{x,y} = \frac{P_f}{3b+a}(3b+a-x-3y)$

Ordenada de carga no canto fixo P_f : $1 \text{ psi} \approx 0.70 \text{ tf/m}^2$.

Módulo de elasticidade Longitudinal: $10.47 \times 10^6 \text{ psi} \approx 7.36 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$

Coefficiente de Poisson: 0.30

Espessura constante: $0.5''$ (polegada) $\approx 0.0121 \text{ m}$.

Dimensões externas: $45'' \times 45''$ (polegada) $\approx 1.143 \times 1.143 \text{ (m}^2\text{)}$

Segundo Grupo: Por brevidade foi analisada uma única chapa, apresentando simetria total quanto a forma, material, vinculação e tipo de malha. O carregamento atuante é simétrico e parcialmente distribuído sobre os bordos superior e inferior da chapa, ver figura (VI-4). Foram calculadas as cotas correspondentes a função de tensões nos pontos da malha e a partir destas calculadas as tensões.

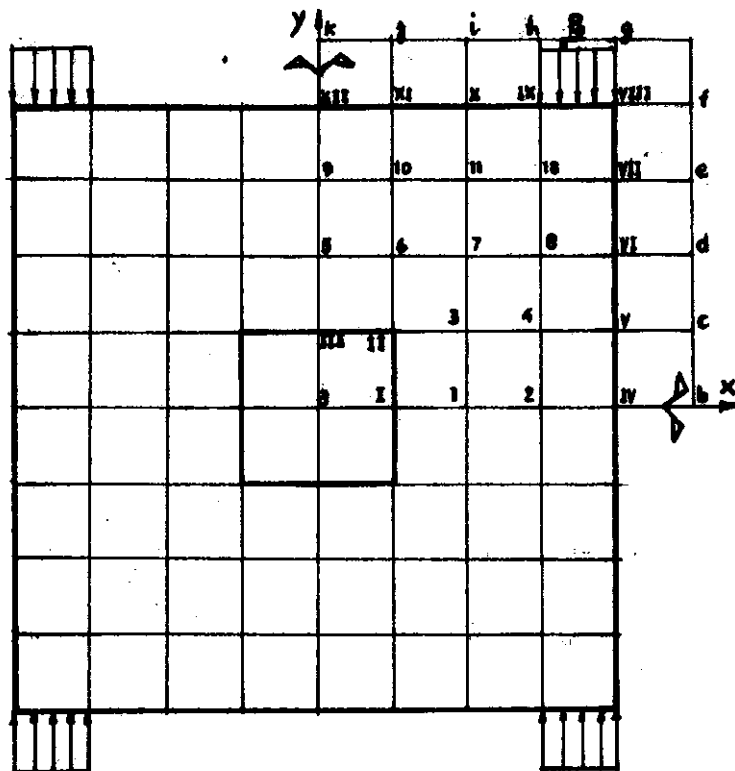


FIG. VI.4

Características:

Chapa I.

Chapa quadrada, bordos livres, isótropa, homogênea, espessura constante ao longo da mesma, com um orifício central quadrangular.

Carga parcialmente distribuída sobre os bordos superior e inferior e de intensidade P , tal que:

$P/\text{espessura} = P_0 = 1$. O carregamento atua no próprio plano da chapa e está aquém da carga crítica de flambagem.

Dados:

Carregamento parcial distribuído por u.c.: 1.00 tf/m.

Módulo de elasticidade longitudinal: 2.1×10^6 tf/m².

Coeficiente de Poisson: 0.3

Espessura: 0.10m

Dimensões externas: 4.00x4.00 (m²).

Dimensões do orifício: 1.00x1.00 (m²).

6.2. Considerações gerais. Resultados.

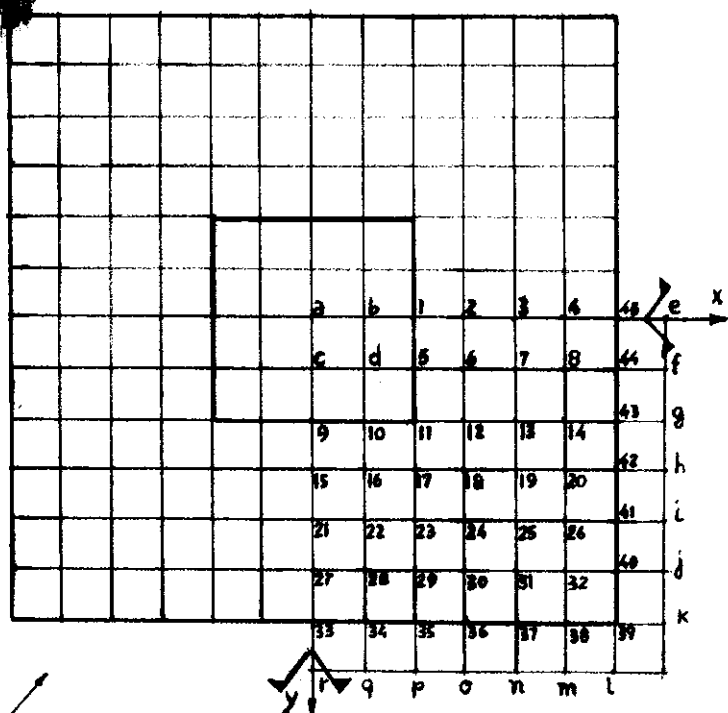
Primeiramente nos deteremos aos resultados referentes as placas.

São verificadas as flechas e os momentos fletores e torsores em todos os pontos internos correspondentes às malhas adotadas.

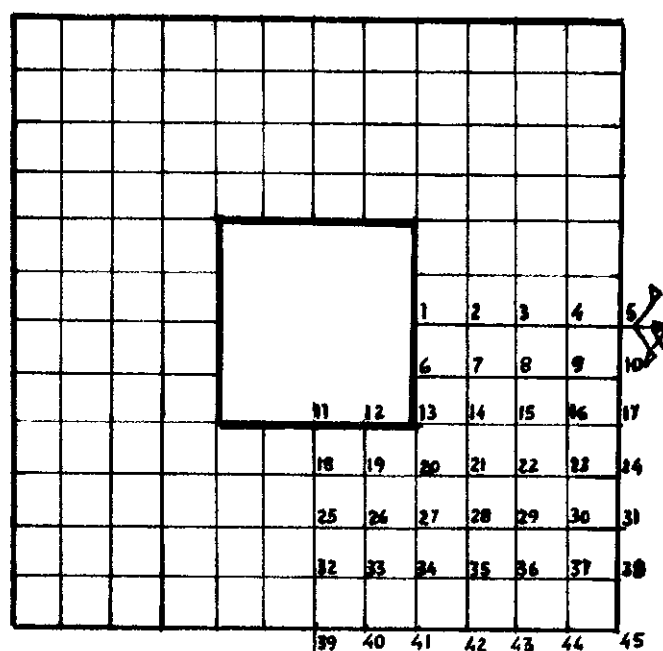
Devido a simetria total de forma, vinculação e carregamento, apenas a quarta parte das estruturas foram analisadas, exceto para a placa IV, que pela assimetria de carregamento foi analisada por completo.

Para as três primeiras placas, foram adotadas duas malhas de características idênticas (malhas quadradas), variando apenas o espaçamento λ : A 1ª malha menos refinada (3x3) e a segunda mais refinada (6x6).

Na análise por diferenças finitas, assim como por elementos finitos adotaram-se malhas iguais, como vemos nas figuras (VI-5).



MALHA P/ DIF. FÍNITA



MALHA P/ ELEM. FÍNITO

FIGS. VI-5

Na análise da placa IV, foram verificadas as deflexões para os diversos pontos correspondentes às malhas adotadas, e estudada a convergência dos resultados para as deflexões no centro e no canto livre da placa. Foram também comparadas com resultados experimentais, conforme se pode constatar nos gráficos de convergência.

Quanto ao estudo das chapas, foram calculados os valores da função de tensões nos pontos da malha (8x8), bem como calculadas as tensões por diferenças finitas. Para verificação dos resultados, comparamos os valores das tensões com os obtidos pela análise por elementos finitos.

OBS:

A numeração indicada nos exemplos apresentados, corresponde à adotada na análise por diferenças finitas, e todos os resultados apresentados são referentes a esta numeração.

"RESULTADOS"

PLACAS:

- 1) Tabela VI-1, apresenta as deflexões da Placa I, para malha 3x3.
- 2) Tabela VI-2, apresenta os valores de M_x , M_y e M_{xy} obtidos da Placa I, para malha 3x3.
- 3) Tabela VI-3, mostra os valores das deflexões na Placa I, para malha 6x6.
- 4) Tabela VI-4, mostra os valores de M_x , M_y e M_{xy} calculados da Placa I, para malha 6x6.
- 5) Gráficos VI-1 e VI-2, mostram na Placa I, a distribuição de M_x e M_y respectivamente, para malha 6x6.
- 6) Tabela VI-5, exibe os valores das deflexões na Placa II, para malha 3x3.
- 7) Tabela VI-6, exibe os valores de M_x , M_y e M_{xy} calculados da Placa I para malha 3x3.
- 8) Tabela VI-7, exibe as deflexões calculadas da Placa II, para malha 6x6.
- 9) Tabela VI-8, exibe os valores de M_x , M_y e M_{xy} calculados da Placa II para malha 6x6.
- 10) Gráficos VI-3 e VI-4, mostram na Placa II, a distribuição de M_x e M_y respectivamente, para malha 6x6.
- 11) Tabela VI-9, apresenta as deflexões obtidas da Placa III para malha 3x3.
- 12) Tabela VI-10, apresenta os valores de M_x , M_y e M_{xy} calcula-

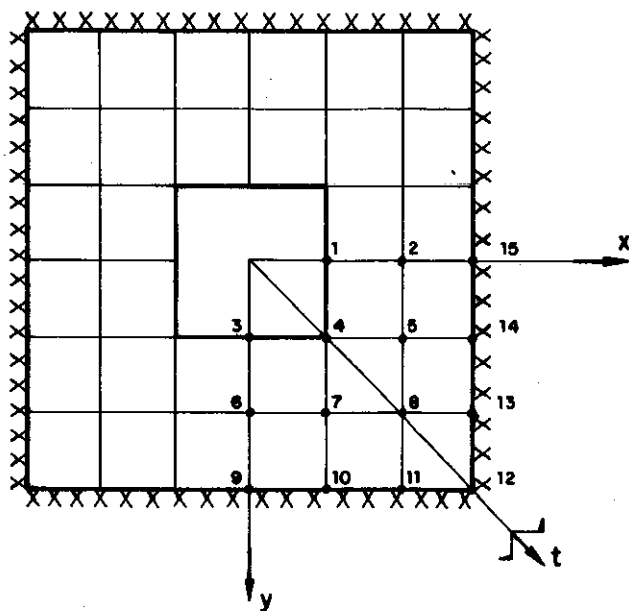
dos da Placa III, para malha 3x3.

- 13) Tabela VI-11, mostra os valores das deflexões obtidas da Placa III para malha 6x6.
- 14) Tabela VI-12, apresenta os valores de M_x , M_y e M_{xy} calculados da Placa III para malha 6x6.
- 15) Gráficos VI-5 e VI-6, mostram a distribuição de M_x e M_y na Placa III, para malha 6x6 respectivamente.
- 16) Tabelas VI-13, VI-14, VI-15, VI-16 e VI-17, mostram os valores das deflexões na Placa IV, calculados por DIF. FINITAS e compara com os obtidos experimentalmente para malhas 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 respectivamente
- 17) Tabelas VI-18 e VI-19, apresentam os valores de deflexões na Placa IV, no canto livre e no centro, para malhas 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 respectivamente.
- 18) Gráficos VI-7 e VI-8, exibem a convergência dos resultados para deflexões no centro e no canto-livre da Placa IV respectivamente.
- 19) Tabela VI-20, mostra os valores de M_x , M_y e M_{xy} no contorno da Placa IV, calculados por DIF. FINITAS e por Elementos Finitos, para malha 6x6.
- 20) Tabela VI-21, mostra os valores de M_x , M_y e M_{xy} em pontos da região central da Placa IV, calculados por DIF.FINITAS e por Elementos Finitos, para malha 6x6.
- 21) Gráficos VI-9 e VI-10, representam a distribuição de M_x e M_y para seções da Placa IV, provenientes de DIF. FINITAS e Elementos Finitos, para malha 6x6.

CHAPA:

- 1) Tabela VI-22, apresenta os valores das tensões: σ_x , σ_y e τ_{xy} , calculadas por DIF. FINITAS e Elementos Finitos na chapa duplamente conexa, para malha 8x8.
- 2) Gráficos VI-11 e VI-12, representam a distribuição de tensões (σ_x e σ_y), na chapa, para malha 8x8 respectivamente.

a.1) PLACA I: QUADRADA ENGASTADA NOS QUATRO BORDOS COM UM ORIFÍCIO QUADRADO NO CENTRO (MALHA 3x3).



DEFLEXÕES EM METROS		
PTOS NODAIS	DIF. FINITAS	ELEM. FINITOS
1	0.00629	0.00710
2	0.00303	0.00272
3	0.00629	0.00727
4	0.00509	0.00566
5	0.00260	0.00225
6	0.00303	0.00271
7	0.00260	0.00225
8	0.00139	0.00098
DO 9	0.00000	0.00000
ATÉ 15		

TABELA VI-1

PLACA I - MALHA 3 x 3

MOMENTOS FLETORES E DE TORÇÃO EM TF*M/M

P.TOS NODAIS	DIFERENÇAS FINITAS			ELEMENTOS FINITOS		
	Mx	My	Mxy	Mx	My	Mxy
1	0.00000	0.28711	0.00000	-0.00806	0.44091	0.09799
2	0.00804	0.15404	0.00000	0.01009	0.16962	0.02363
3	0.28711	0.00000	0.00000	0.54486	0.22314	0.13690
4	0.32325	0.32325	0.18789	0.34179	0.34619	0.28874
5	0.06692	0.15673	0.12415	0.03797	0.16350	0.13426
6	0.15404	0.00804	0.00000	0.15464	0.01027	0.01699
7	0.15673	0.06692	0.12415	0.16372	0.03129	0.18850
8	0.04499	0.04499	0.17149	0.01322	0.01219	0.24347
9	-0.35053	-1.16846	0.00000	-0.43755	-1.45891	-0.06203
10	-0.30057	-1.00192	0.00000	-0.38527	-1.28424	0.00874
11	-0.16049	-0.53499	0.00000	-0.16818	-0.56059	0.04452
12	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.13138
13	-0.53499	-0.16049	0.00000	-0.56643	-0.16993	0.04633
14	-1.00192	-0.30057	0.00000	-1.26735	-0.38020	0.00617
15	-1.16846	-0.35053	0.00000	-1.59307	-0.47792	-0.06247

a.2) **PLACA I**: QUADRADA ENGASTADA NOS QUATRO BORDOS COM UM ORIFÍCIO QUADRADO NO CENTRO (MALHA 6 x 6)

DEFLEXÕES EM METROS		
P.TOS NODAIS	DIF. FINITAS	ELEM. FINITOS
1	0.00519	0.00674
2	0.00374	0.00463
3	0.00223	0.00258
4	0.00080	0.00082
5	0.00491	0.00641
6	0.00357	0.00442
7	0.00214	0.00247
8	0.00077	0.00079
11	0.00412	0.00535
12	0.00309	0.00379
13	0.00187	0.00214
14	0.00068	0.00069
18	0.00236	0.00279
19	0.00144	0.00161
20	0.00052	0.00052
25	0.00089	0.00094
26	0.00031	0.00031
32	0.00012	0.00010
39 ATÉ 45	0.00000	0.00000

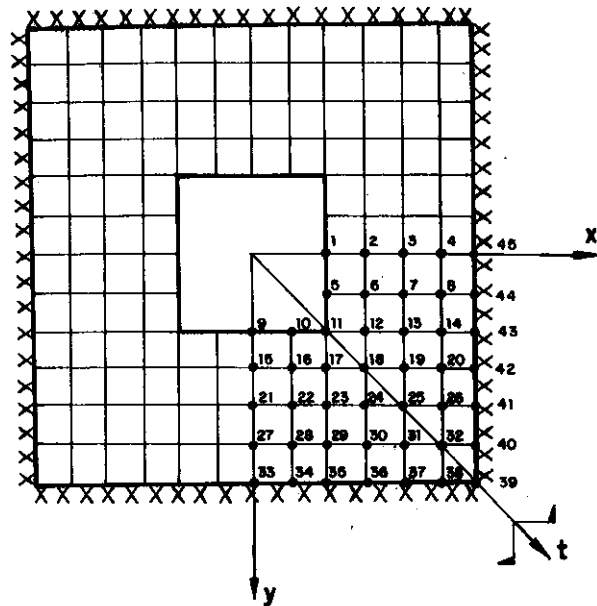


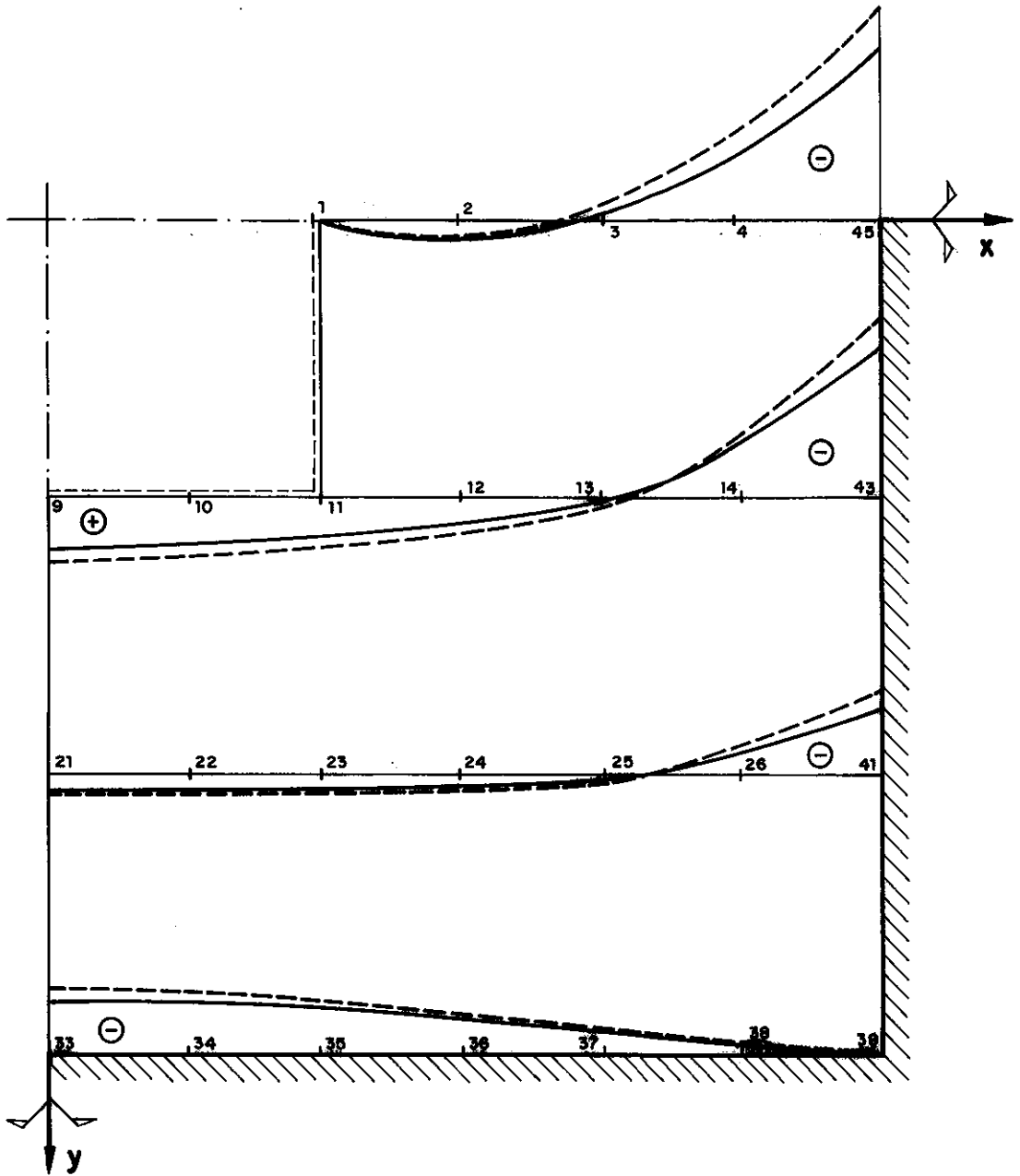
TABELA VI-3

PLACA I - MALHA 6 x 6

MOMENTOS FLETORES E DE TORÇÃO EM TF*M/M

P.TOS NODAIS	DIFERENÇAS FINITAS			ELEMENTOS FINITOS		
	Mx	My	Mxy	Mx	My	Mxy
1	0.00000	0.38779	0.00000	-0.00682	0.46992	-0.00808
2	0.12837	0.27799	0.00000	0.11659	0.31641	0.00395
3	-0.04307	0.11923	0.00000	-0.06754	0.12043	0.00530
4	-0.47076	-0.09923	0.00000	-0.61889	-0.14207	0.00785
5	0.00000	0.36246	0.16597	-0.05537	0.45732	0.18575
6	0.14769	0.28231	0.09589	0.15851	0.33912	0.10895
7	-0.04615	0.12461	0.07269	-0.05699	0.12795	0.09254
8	-0.44769	-0.09230	0.04846	-0.57863	-0.13409	0.05558
11	0.24999	0.24999	0.21820	0.32708	0.32087	0.36064
12	0.19591	0.22976	0.15211	0.26243	0.30731	0.22314
13	0.01384	0.11834	0.13125	0.02001	0.12625	0.18590
14	-0.37769	-0.08923	0.09382	-0.42605	-0.10834	0.11517
18	0.18062	0.18062	0.16993	0.18638	0.18223	0.24372
19	0.03538	0.09461	0.17230	0.05070	0.09536	0.25528
20	-0.27846	-0.05461	0.13216	-0.30757	-0.07345	0.17472
25	0.02999	0.02999	0.19021	0.05401	0.05401	0.26595
26	-0.21277	0.07769	0.15211	-0.21813	-0.06497	0.20014
32	-0.08877	-0.08877	0.11987	-0.09660	-0.09162	0.13750
39	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.05375
40	-0.18625	-0.05587	0.00000	-0.18753	-0.05626	0.01254
41	-0.51898	-0.15569	0.00000	-0.60242	-0.18070	0.00719
42	-0.83020	-0.24906	0.00000	-1.00977	-0.30293	0.00296
43	-1.05886	-0.31765	0.00000	-1.31645	-0.39494	0.00076
44	-1.19480	-0.35840	0.00000	1.49892	-0.44960	-0.00020
45	-1.23984	-0.37195	0.00000	-1.54199	-0.46260	-0.01738

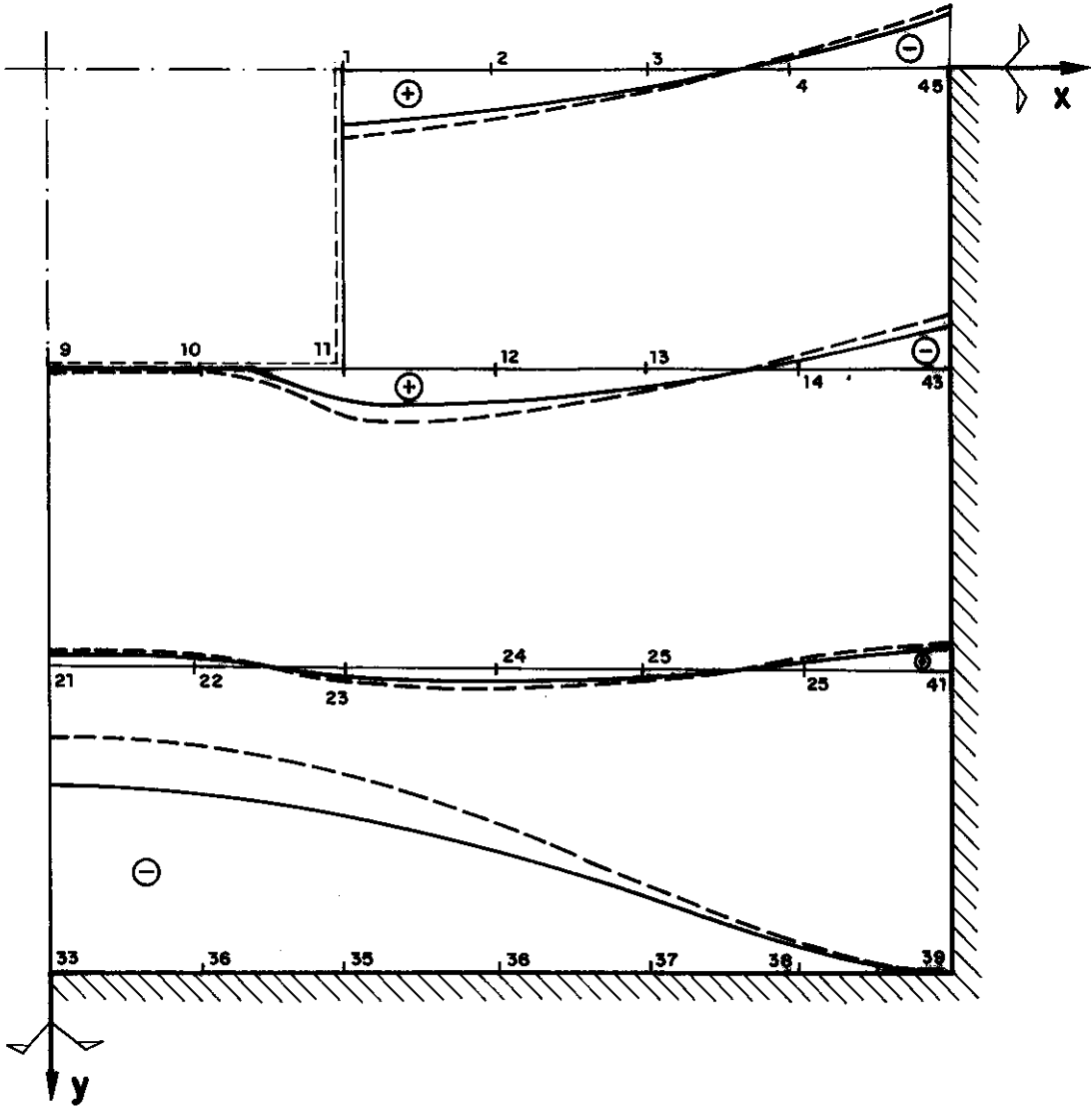
Mx - Distribuição p/ Malha 6x6



CONVENÇÃO :

- DIF. FINITA
- - - - ELEM. FINITO
- //// ENGASTE
- == LIVRE

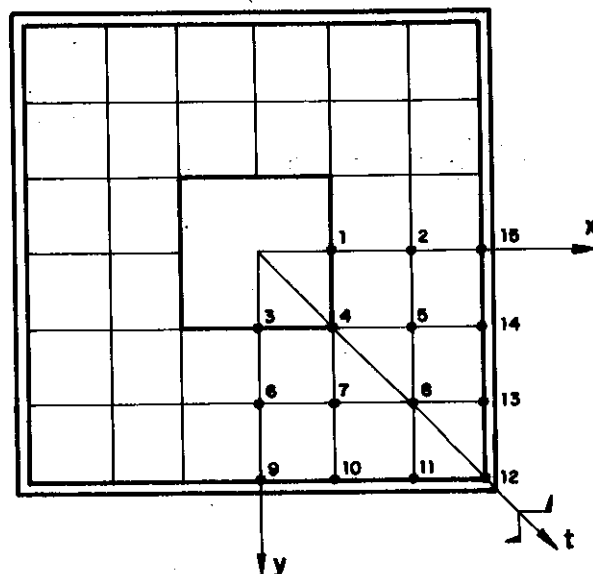
M_y - Distribuição p/ Malha 6x6



CONVENÇÃO:

- DIF. FINITA
- - - ELEM. FINITO
- //// ENGASTE
- == LIVRE

b.1) **PLACA II**: QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA NOS QUATRO BORDOS COM UM ORIFÍCIO QUADRADO NO CENTRO (MALHA 3x3).



DEFLEXÕES EM METROS

PTOS NODAIS	DIF. FINITAS	ELEM. FINITOS
1	0.01640	0.02890
2	0.00937	0.01514
3	0.01640	0.02908
4	0.01370	0.02428
5	0.00822	0.01321
6	0.00937	0.01518
7	0.00822	0.01323
8	0.00503	0.00769
DO 9 ATE 15	0.00000	0.00000

TABELA VI-5

PLACA II - MALHA 3 x 3

MOMENTOS FLETORES E DE TORÇÃO EM TF*M/M

P.TOS NODAIS	DIFERENÇAS FINITAS			ELEMENTOS FINITOS		
	Mx	My	Mxy	Mx	My	Mxy
1	0.00000	0.94409	0.00000	0.23744	1.49229	0.32223
2	0.58142	0.57657	0.00000	0.82355	0.93586	-0.02420
3	0.94409	0.00000	0.00000	1.59852	0.45732	0.36415
4	0.69699	0.69699	0.54557	0.95216	0.98454	0.77018
5	0.64321	0.54878	0.39337	0.65331	0.83080	0.50154
6	0.57657	0.58142	0.00000	0.89640	0.59404	-0.03889
7	0.54978	0.64321	0.39337	0.78470	0.66758	0.47033
8	0.46049	0.46049	0.65880	0.49768	0.53685	0.72393
9	0.00000	0.00000	0.00000	0.02448	0.11179	0.01778
10	0.00000	0.00000	0.29211	0.04023	0.00652	0.49570
11	0.00000	0.00000	0.55313	0.00660	0.00190	0.91030
12	0.00000	0.00000	0.50783	0.18825	0.02609	1.11128
13	0.00000	0.00000	0.55313	0.05258	0.02191	0.95474
14	0.00000	0.00000	0.29211	0.01628	0.01959	0.50754
15	0.00000	0.00000	0.00000	0.12342	0.00324	-0.01820

TABELA VI-6

b.2) **PLACA II:** QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA NOS QUATRO BORDOS COM UM ORIFÍCIO QUADRADO NO CENTRO (MALHA 6 x 6).

DEFLEXÕES EM METROS

P.TOS
NODAIS

DIF. FINITAS

ELEM. FINITOS

1 0.01528 0.02990

2 0.01199 0.02287

3 0.00845 0.01570

4 0.00441 0.00840

5 0.01463 0.02874

6 0.01156 0.02207

7 0.00816 0.01519

8 0.00426 0.00779

11 0.01276 0.02510

12 0.01032 0.01970

13 0.00732 0.01366

14 0.00382 0.00703

18 0.00845 0.01593

19 0.00599 0.01119

20 0.00313 0.00579

25 0.00425 0.00795

26 0.00217 0.00414

32 0.00112 0.00217

39 ATÉ 0.00000 0.00000

45

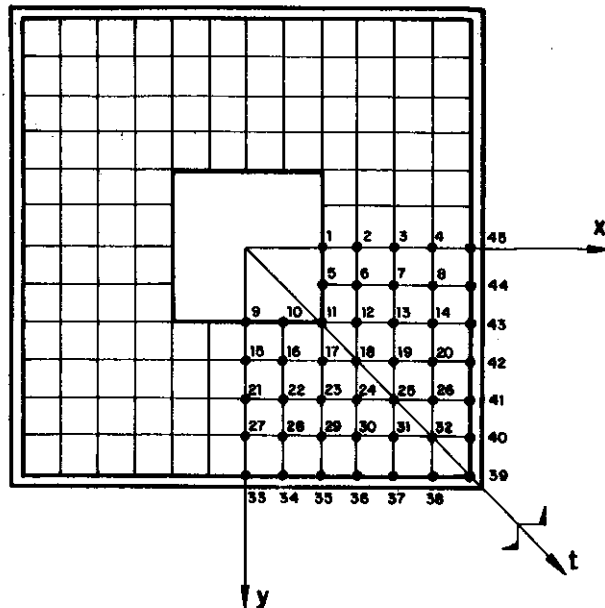
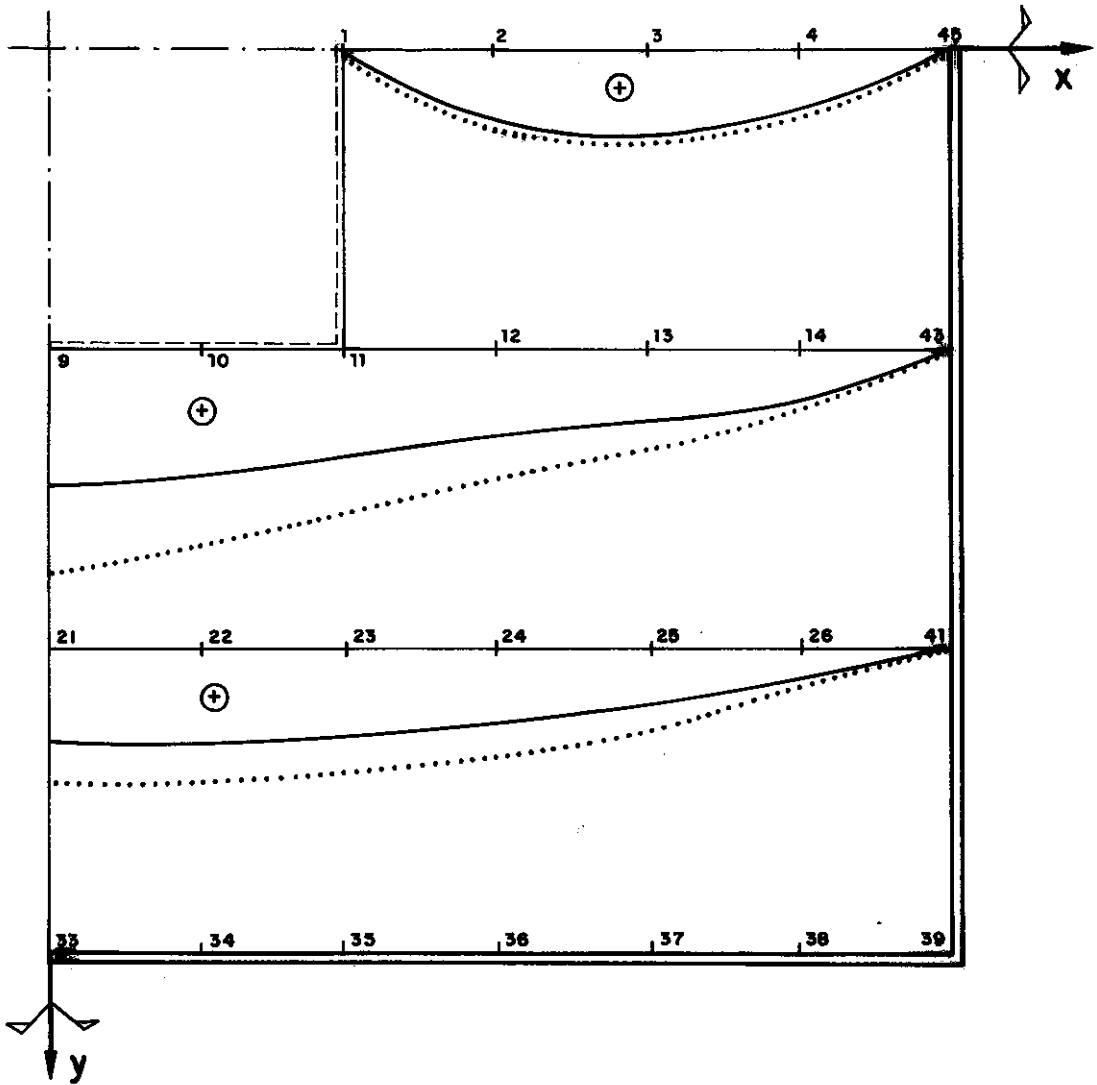


TABELA VI-7

PLACA II - MALHA 6 x 6

MOMENTOS FLETORES E DE TORÇÃO EM TF*M/M						
P.TOS NODAIS	DIFERENÇAS FINITAS			ELEMENTOS FINITOS		
	Mx	My	Mxy	Mx	My	Mxy
1	0.00000	0.96696	0.00000	0.04085	1.57710	-0.03730
2	0.49092	0.82207	0.00000	0.52353	1.26559	0.00072
3	0.60923	0.65877	0.00000	0.64315	0.91105	0.00041
4	0.44007	0.39592	0.00000	0.46099	0.49133	0.00381
5	0.00000	0.88919	0.35457	-0.19335	1.56952	0.37451
6	0.51784	0.77415	0.18873	0.61851	1.29459	0.23247
7	0.61799	0.64599	0.14632	0.66801	0.90880	0.27197
8	0.44238	0.40361	0.15831	0.45053	0.48644	0.26896
11	0.57199	0.57199	0.45793	1.07416	1.08016	1.12639
12	0.56515	0.60284	0.29884	0.57267	0.70343	0.62815
13	0.50838	0.61331	0.27852	0.57879	0.85485	0.54734
14	0.43946	0.42654	0.29514	0.44976	0.46127	0.53379
18	0.51699	0.51699	0.31756	0.54914	0.54914	0.65019
19	0.44415	0.52985	0.37369	0.45316	0.73826	0.74048
20	0.29661	0.34238	0.42188	0.30636	0.40914	0.76624
25	0.40899	0.40899	0.45930	0.57326	0.57218	0.86043
26	0.16692	0.27299	0.53240	0.18508	0.32530	0.95036
32	0.15899	0.15899	0.57171	0.20487	0.20587	1.08441
39	0.00000	0.00000	0.67307	-0.00224	0.05395	1.20038
40	0.00000	0.00000	0.60442	0.00132	-0.00348	1.13524
41	0.00000	0.00000	0.55407	-0.00248	-0.00257	0.98406
42	0.00000	0.00000	0.48273	-0.00046	-0.00150	0.77958
43	0.00000	0.00000	0.31796	0.00207	0.00014	0.53569
44	0.00000	0.00000	0.17096	-0.00540	-0.00804	0.26915
45	0.00000	0.00000	0.00000	0.02781	-0.00382	0.00451

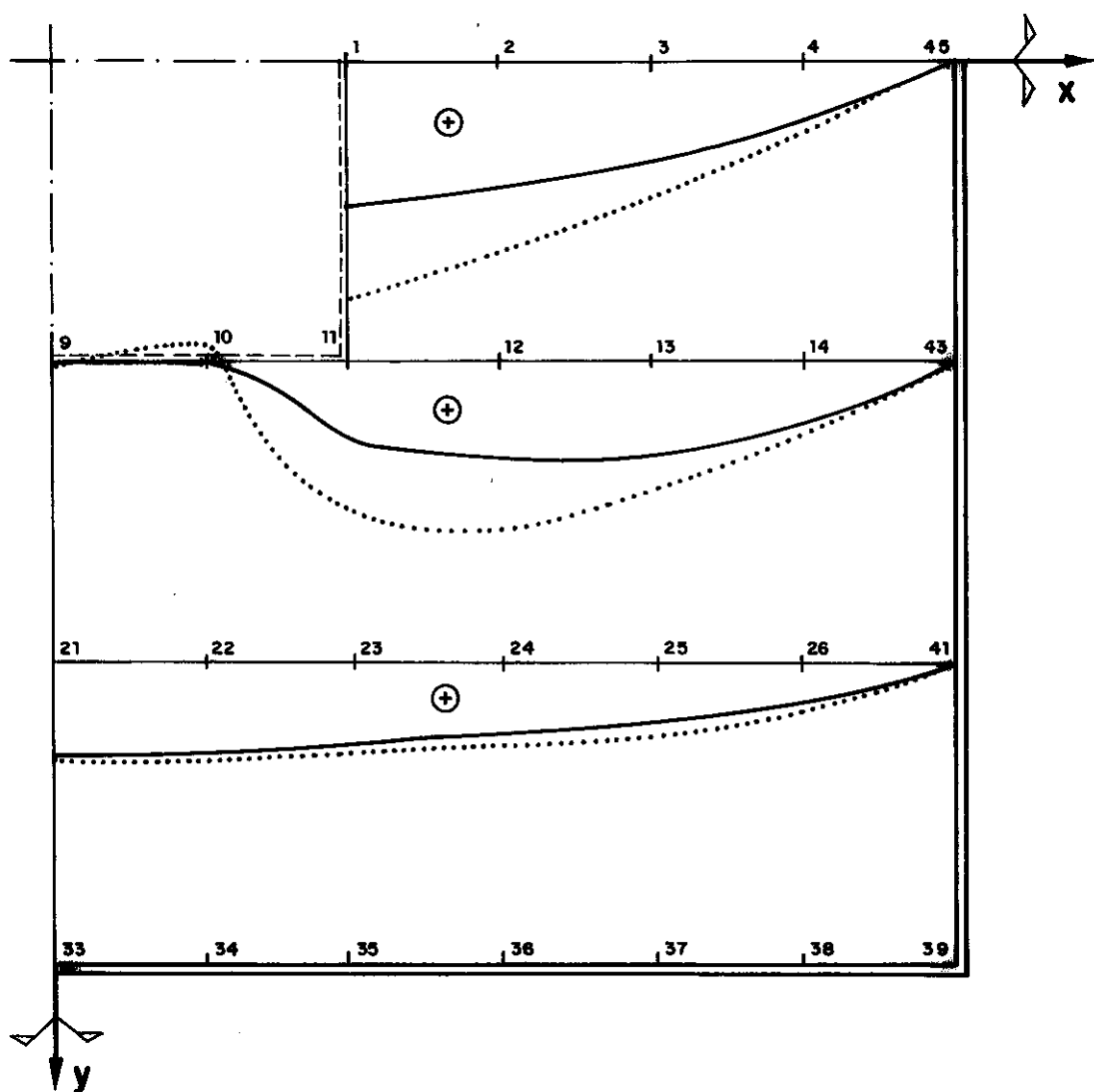
Mx - Distribuição p/ Malha 6x6



CONVENÇÃO:

- DIF. FINITA
- ELEM. FINITO
- ===== SIMPLS. APOIADO
- ===== LIVRE

My - Distribuição p/ Malha 6x6



CONVENÇÃO:

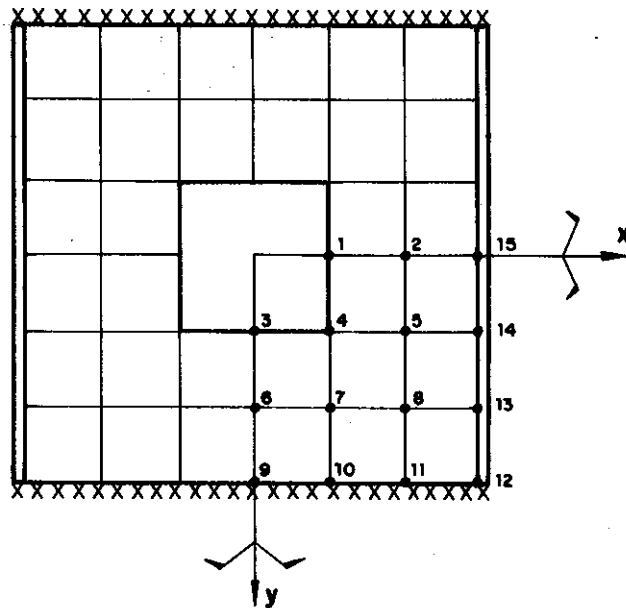
— DIF. FINITA

..... ELEM. FINITO

== SIMPLES. APOIADO

== LIVRE

c.1) **PLACA III** : QUADRADA ENGASTADA EM DOIS BORDOS OPOSTOS E SIMPLEMENTE APOIADA NOS OUTROS DOIS COM UM ORIFÍCIO QUADRADO NO CENTRO (MALHA 3x3).



DEFLEXÕES EM METROS

PTOS DIF. FINITAS ELEM. FINITOS
NODAIS

1	0.00978	0.01218
2	0.00578	0.00657
3	0.00876	0.01107
4	0.00761	0.00943
5	0.00479	0.00532
6	0.00401	0.00399
7	0.00365	0.00359
8	0.00238	0.00222
DO 9		
ATÉ 15	0.00000	0.00000

 PLACA III - MALHA 3 x 3

 MOMENTOS FLETORES E DE TORÇÃO EM TF*M/M

PTOS NODAIS	DIFERENÇAS FINITAS			ELEMENTOS FINITOS		
	Mx	My	Mxy	Mx	My	Mxy
1	0.00000	0.75897	0.00000	0.03437	0.99363	0.14504
2	0.45472	0.48218	0.00000	0.47820	0.60932	-0.02671
3	0.40257	0.00000	0.00000	0.44888	0.28877	0.18027
4	0.42481	0.43994	0.25838	0.49377	0.50769	0.37639
5	0.45930	0.38505	0.20606	0.41159	0.49080	0.30904
6	0.09576	-0.10077	0.00000	0.05988	-21232	0.00686
7	0.15711	-0.07115	0.13373	0.15185	-0.13979	0.17645
8	0.21173	0.05826	0.25615	0.18975	0.03105	0.33407
9	-0.46371	-1.54571	0.00000	-0.62786	-2.09287	-0.05345
10	-0.42199	-1.40667	0.00000	-0.59079	-1.96930	-0.00620
11	-0.27545	-0.91818	0.00000	-0.37978	-1.26592	0.01192
12	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00230	-0.00766	0.02090
13	0.00000	0.00000	0.32227	-0.01500	-0.02170	0.46745
14	0.00000	0.00000	0.22802	0.02210	0.00315	0.32210
15	0.00000	0.00000	0.00000	-0.12007	-0.00271	-0.01365

c.2) **PLACA III:** QUADRADA ENGASTADA EM DOIS BORDOS OPOSTOS
E SIMPLEMENTE APOIADA NOS OUTROS DOIS
COM UM ORIFÍCIO QUADRADO NO CENTRO (MALHA 6x6).

P.TOS NODAIS	DEFLEXÕES EM METROS	
	DIF. FINITAS	ELEM. FINITOS
1	0.00838	0.01210
2	0.00668	0.00938
3	0.00479	0.00657
4	0.00255	0.00343
5	0.00785	0.01139
6	0.00631	0.00888
7	0.00454	0.00624
8	0.00242	0.00326
9	0.00737	0.01069
10	0.00713	0.01038
11	0.00638	0.00929
12	0.00528	0.00746
13	0.00383	0.00529
14	0.00203	0.00278
15	0.00519	0.00723
16	0.00505	0.00704
17	0.00461	0.00643
18	0.00386	0.00535
19	0.00278	0.00386
20	0.00143	0.00205
21	0.00299	0.00392
22	0.00292	0.00383
23	0.00268	0.00353
24	0.00224	0.00299
25	0.00158	0.00220
26	0.00081	0.00118
27	0.00103	0.00120
28	0.00101	0.00118
29	0.00093	0.00109
30	0.00079	0.00094
31	0.00055	0.00071
32	0.00029	0.00039
33 ATÉ	0.00000	0.00000
45		

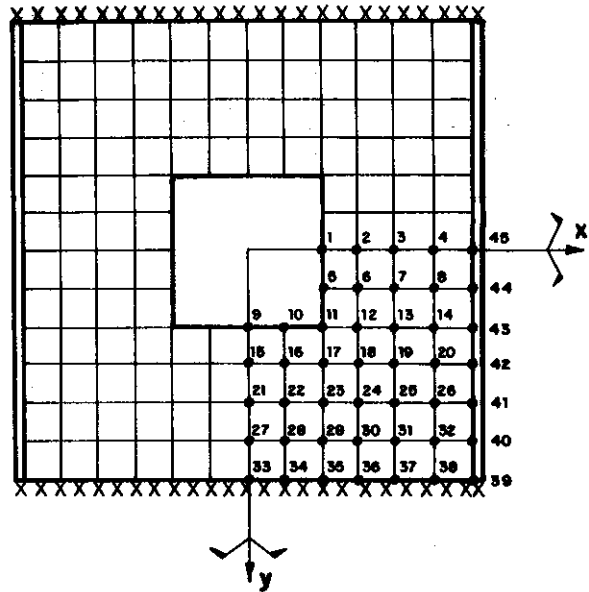


TABELA VI-11

PLACA III - MALHA 6 x 6

MOMENTOS FLETORES E DE TORÇÃO EM TF*M/M

P.TOS NODAIS	DIFERENÇAS FINITAS			ELEMENTOS FINITOS		
	Mx	My	Mxy	Mx	My	Mxy
1	0.00000	0.74619	0.00000	0.00749	1.01893	-0.00793
2	0.30815	0.61185	0.00000	0.32249	0.81349	0.00077
3	0.39662	0.47038	0.00000	0.41604	0.59514	0.00229
4	0.29169	0.27231	0.00000	0.30031	0.33048	-0.00449
5	0.00000	0.65877	0.25401	-0.08790	0.94362	0.31745
6	0.31992	0.55307	0.14081	0.38026	0.78084	0.14553
7	0.38723	0.43669	0.11800	0.43688	0.56992	0.17073
8	0.27938	0.26162	0.12936	0.31394	0.31446	0.16792
9	0.34748	0.00000	0.00000	0.38073	0.05163	-0.02984
10	0.34709	0.00000	0.16975	0.40454	-0.10231	0.20594
11	0.33261	0.30838	0.29305	0.47816	0.46069	0.50341
12	0.36685	0.39215	0.19977	0.41042	0.59791	0.33001
13	0.35277	0.34532	0.19748	0.39969	0.46311	0.31620
14	0.22199	0.21499	0.23719	0.28986	0.26053	0.32442
15	0.23415	0.08985	0.00000	0.25870	0.06831	0.00330
16	0.23892	0.10807	0.09194	0.35298	0.10817	0.10363
17	0.27038	0.18961	0.15709	0.43179	0.17262	0.25009
18	0.29438	0.22061	0.19371	0.34771	0.25914	0.31173
19	0.24907	0.18392	0.23248	0.32081	0.26851	0.38554
20	0.09000	0.11099	0.30423	0.16326	0.17148	0.42317
21	0.05230	-0.15230	0.00000	0.02843	-0.31030	0.00361
22	0.07369	-0.13469	0.06623	0.04381	-0.31180	0.07803
23	0.11007	-0.09507	0.13031	0.08983	-0.24081	0.18634
24	0.13876	-0.07177	0.19411	0.33645	-0.13245	0.30076

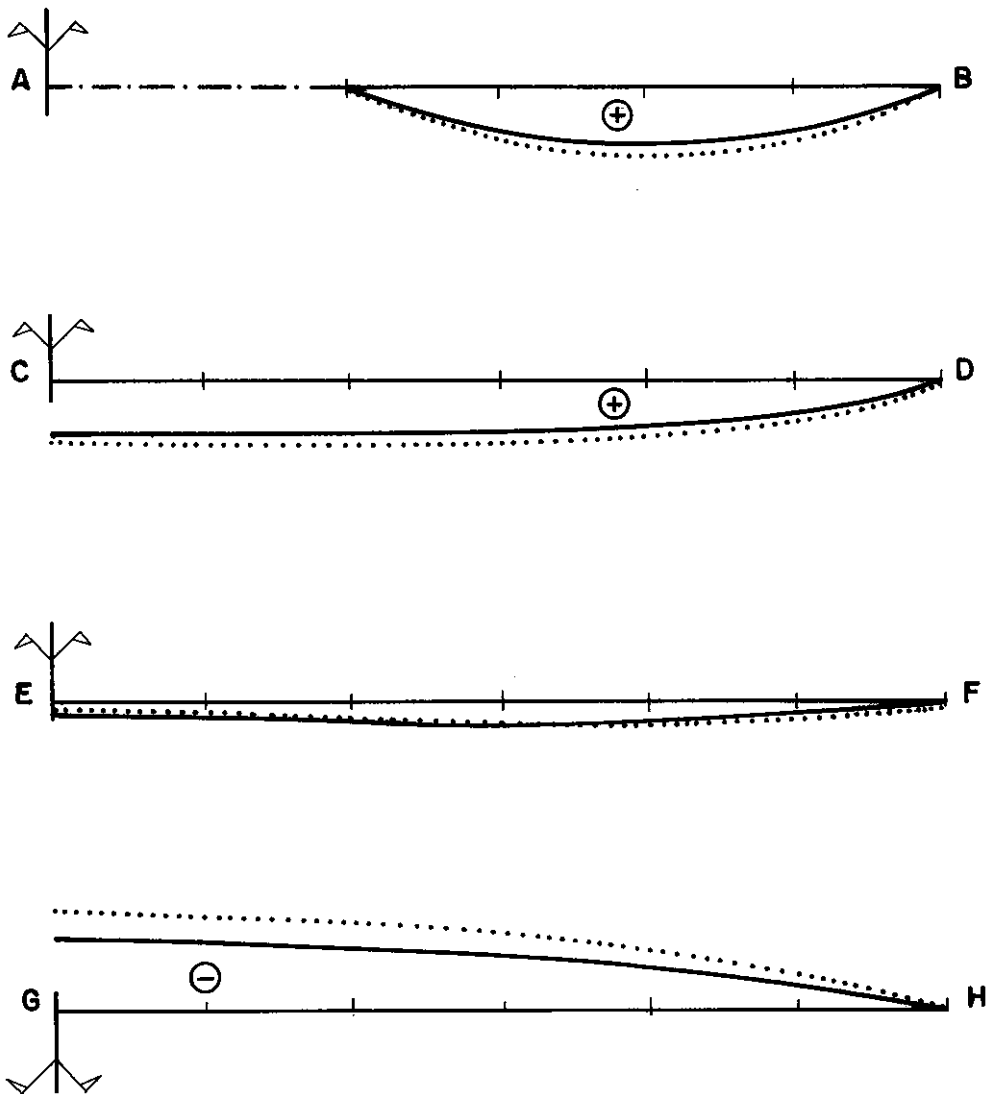
continua

PLACA III - MALHA 6 x 6

MOMENTOS FLETORES E DE TORÇÃO EM TF*M/M

P.TOS NODAIS	DIFERENÇAS FINITAS			ELEMENTOS FINITOS		
	Mx	My	Mxy	Mx	My	Mxy
25	0.11769	-0.08230	0.25483	0.15089	-0.04380	0.37907
26	0.02792	0.03315	0.30006	0.04159	0.01062	0.44216
27	-0.17854	-0.70246	0.00000	-0.28262	-1.06319	-0.00369
28	-0.16623	-0.67777	0.04240	-0.17646	-1.05248	0.04418
29	-0.13231	-0.60669	0.09100	-0.13887	-0.94943	0.10367
30	-0.08776	-0.49323	0.14848	-0.08732	-0.76996	0.17586
31	-0.05699	-0.34400	0.20556	-0.02964	-0.52767	0.25362
32	-0.02361	-0.16396	0.21202	-0.01958	-0.23568	0.32613
33	-0.47705	-1.59015	0.00000	-0.67087	-2.23622	-0.01451
34	-0.46632	-1.55439	0.00000	-0.65280	-2.17600	-0.00112
35	-0.43121	-1.43738	0.00000	-0.61150	-2.03835	-0.00139
36	-0.36347	-1.21157	0.00000	-0.53202	-1.77342	-0.00063
37	-0.25577	-0.85257	0.00000	-0.40645	-1.35484	0.00010
38	-0.13631	-0.45436	0.00000	-0.23023	-0.76744	0.00403
39	0.00000	0.00000	0.00000	0.00266	0.03553	0.00769
40	0.00000	0.00000	0.21915	0.01015	-0.00925	0.35333
41	0.00000	0.00000	0.30611	-0.00247	-0.00996	0.46823
42	0.00000	0.00000	0.32846	0.00019	-0.00252	0.44003
43	0.00000	0.00000	0.26492	0.00170	-0.00106	0.32936
44	0.00000	0.00000	0.13946	-0.00595	-0.00884	0.17305
45	0.00000	0.00000	0.00000	0.02724	-0.00465	0.00503

Mx - Distribuição p/ Malha 6 x 6



CONVENÇÃO !

- DIF. FINITA
- ELEM. FINITO
- //// ENGASTE
- == SIMP. APOIADO
- - - - LIVRE

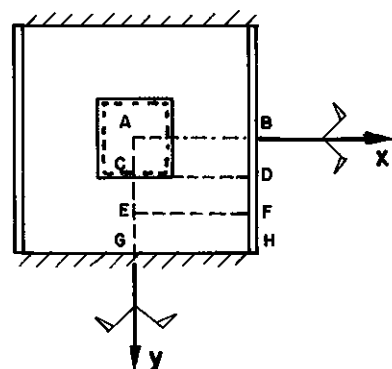
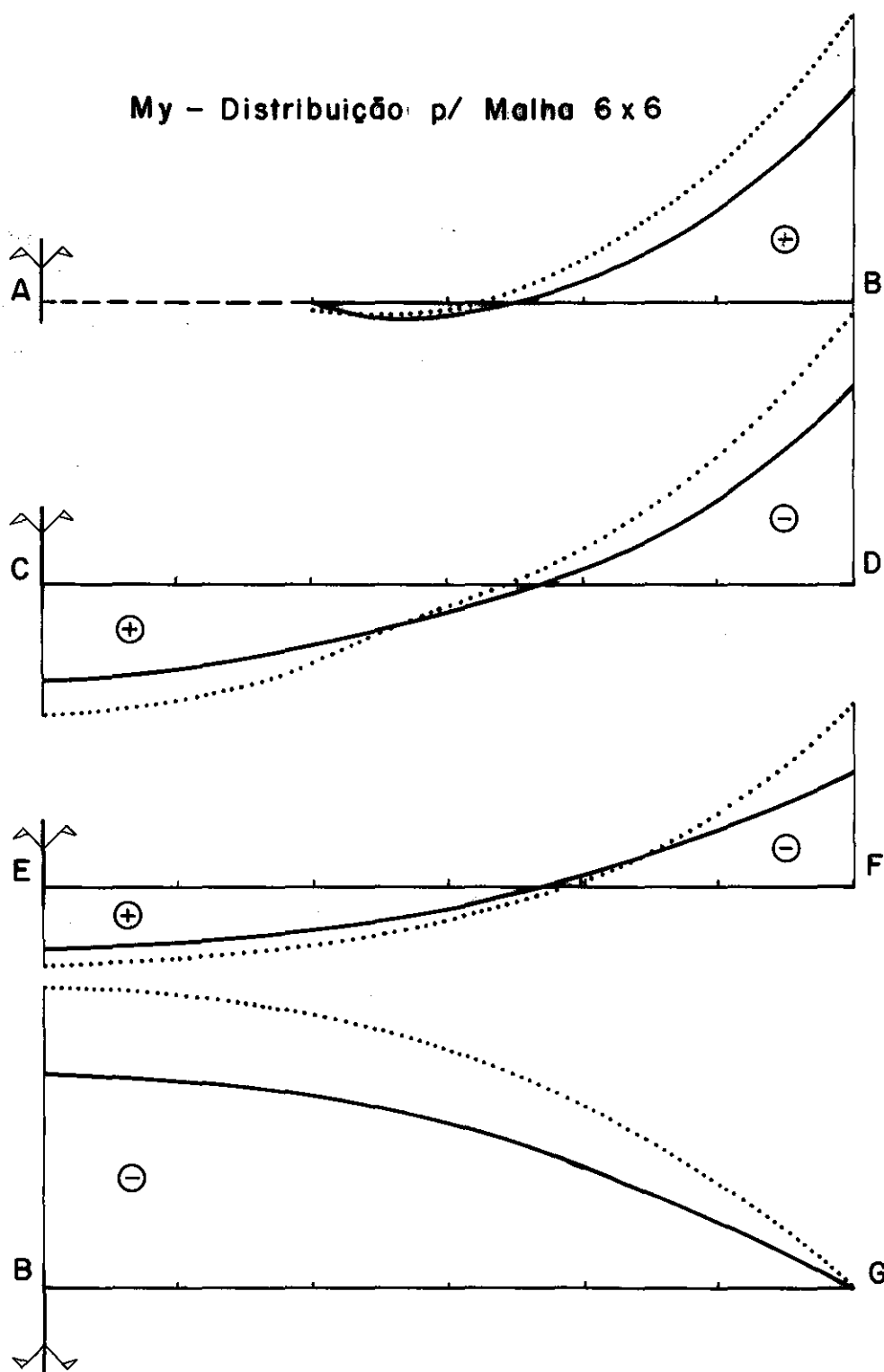


Gráfico VI-5

My - Distribuição p/ Malha 6 x 6



CONVENÇÃO:

- _____ DIF. FINITA
 ELEM. FINITO
 \\\\\\\\\\\ ENGASTE
 ===== SIMP. APOIADO
 - - - - - LIVRE

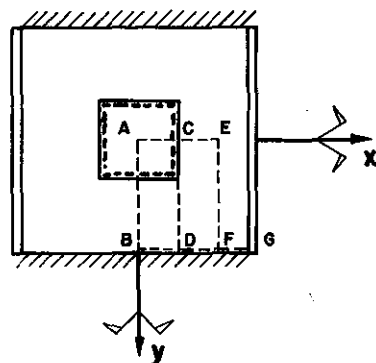
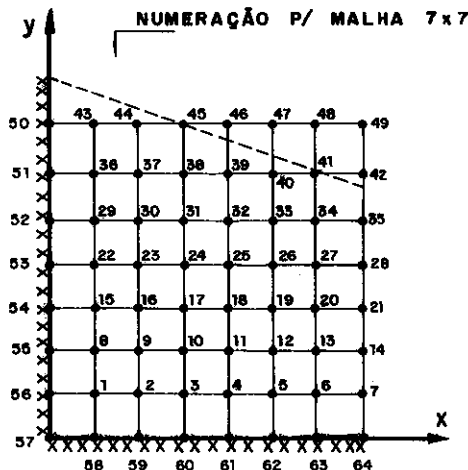
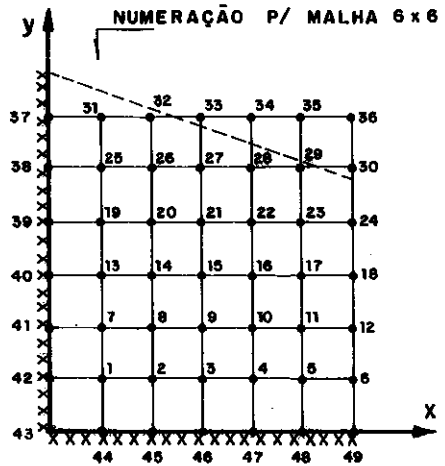
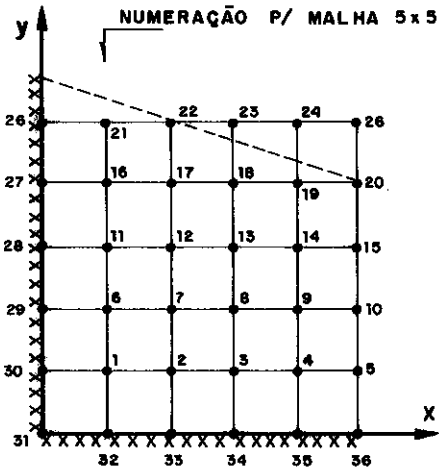
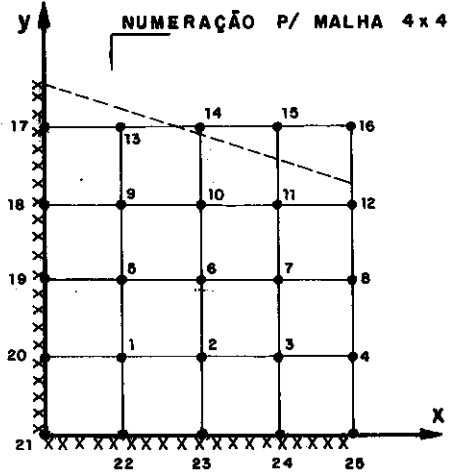
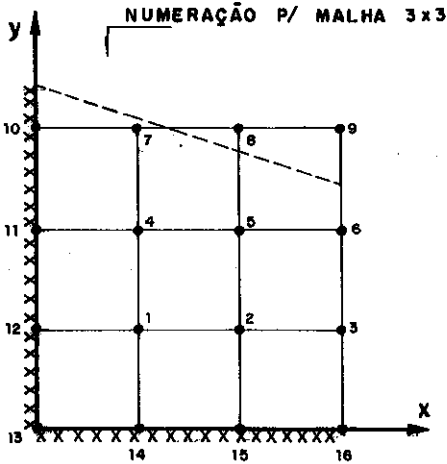


Gráfico VI- 6

d) **PLACA IV: QUADRADA ENCASTADA EM DOIS BORDOS ADJACENTES**
E LIVRE NOS OUTROS DOIS, MALHAS 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7.



PLACA IV - MALHA 3 x 3

DEFLEXÕES EM POLEGADAS

P.TOS NODAIS	DIF. FINITA	EXPERIMENTAL	DIFERENÇA	%
1	0.04453	0.02700	65.2	
2	0.08259	0.06000	37.3	
3	0.11197	0.08200	36.0	
4	0.06869	0.05200	32.0	
5	0.14315	0.12000	19.0	
6	0.20415	0.17500	17.0	
7	0.07641	0.05500	39.0	
8	0.17480	0.15400	13.0	
9	0.25509	0.22800	12.0	
10 até 16	0.00000	0.00000	0.0	

TABELA VI-13

PLACA IV - MALHA 4 x 4

DEFLEXÕES EM POLEGADAS

P.TOS NODAIS	DIF. FINITA	EXPERIMENTAL	DIFERENÇA	%
1	0.02019	0.01500	37.0	
2	0.04059	0.03000	32.5	
3	0.05564	0.04300	28.0	
4	0.06897	0.05500	25.0	
5	0.03620	0.02800	29.0	
6	0.08070	0.06900	17.0	
7	0.11763	0.10500	12.0	
8	0.15065	0.13400	12.0	
9	0.04297	0.03500	23.0	
10	0.10391	0.09300	12.0	
11	0.15867	0.14800	7.0	
12	0.20692	0.19300	7.0	
13	0.04584	0.03600	12.7	
14	0.11914	0.10400	11.4	
15	0.18769	0.17200	10.9	
16	0.24530	0.22800	7.5	
17 até 25	0.00000	0.00000	0.0	

TABELA VI-14

PLACA IV - MALHA 5 x 5

DEFLEXÕES EM POLEGADAS

P.TOS NODAIS	DIF. FINITA	EXPERIMENTAL	DIFERENÇA %
1	0.01035	0.00900	13.0
2	0.02220	0.01900	17.0
3	0.03144	0.02800	12.5
4	0.03881	0.03500	11.0
5	0.04566	0.04000	14.0
6	0.02055	0.01800	14.0
7	0.04828	0.04500	7.5
8	0.07258	0.06900	5.0
9	0.09279	0.08700	6.5
10	0.11214	0.10500	7.0
11	0.02620	0.02500	5.0
12	0.06609	0.06200	6.8
13	0.10404	0.10000	4.0
14	0.13687	0.13200	3.0
15	0.16783	0.16000	4.0
16	0.02862	0.02800	2.0
17	0.07647	0.07200	6.0
18	0.12490	0.12000	4.0
19	0.16782	0.16500	4.8
20	0.20712	0.20200	2.5
21	0.02956	0.02500	18.0
22	0.08417	0.07300	15.0
23	0.14170	0.14400	-2.0
24	0.19272	0.18800	2.5
25	0.23716	0.22800	4.0
26 até 36	0.00000	0.00000	0.0

TABELA VI-15

PLACA IV - MALHA 6 x 6

DEFLEXÕES EM POLEGADAS

PTOS NODAIS	DIF. FINITAS	EXPERIMENTAL	DIF. %	ELEM. FINITOS
1	0.00583	0.00600	-2.9	0.00470
2	0.01321	0.01200	9.0	0.01278
3	0.1938	0.01900	1.9	0.02024
4	0.02422	0.02300	5.0	0.02659
5	0.02849	0.02700	5.2	0.03249
6	0.03233	0.03100	4.1	0.03603
7	0.01250	0.01200	4.0	0.01235
8	0.03069	0.02700	12.0	0.03535
9	0.04756	0.04500	5.4	0.05845
10	0.06172	0.06000	2.7	0.07886
11	0.07413	0.07000	5.6	0.09696
12	0.08636	0.08200	5.0	0.11312
13	0.01697	0.01700	-0.2	0.01863
14	0.04433	0.04300	3.0	0.05586
15	0.07167	0.06900	3.7	0.09653
16	0.09575	0.09500	0.8	0.13178
17	0.11714	0.11400	2.7	0.16422
18	0.13825	0.13400	3.0	0.19524
19	0.01627	0.01900	1.4	0.02311
20	0.05299	0.05200	1.8	0.07160
21	0.08869	0.08800	0.7	0.12554
22	0.12141	0.12000	1.1	0.17623
23	0.15079	0.14900	1.2	0.22205
24	0.17922	0.17500	2.3	0.26597
25	0.02042	0.01900	6.9	0.02667
26	0.05847	0.05500	5.9	0.08380
27	0.10066	0.09800	2.6	0.14948
28	0.14042	0.14000	0.3	0.21242
29	0.17619	0.17700	-0.4	0.26927
30	0.20981	0.20700	1.3	0.32260
31	0.02161	0.01900	7.8	0.02790
32	0.06274	0.05500	12.3	0.09346
33	0.11107	0.10400	6.3	0.17083
34	0.15715	0.15400	2.0	0.24514
35	0.19806	0.19700	0.5	0.31104
36	0.23484	0.22800	2.9	0.37030
37 até 49	0.00000	0.00000	0.0	0.00000

PLACA IV - MALHA 7 x 7

DEFLEXÕES EM POLEGADAS

P.TOS NODAIS	DIF. FINITA	EXPERIMENTAL	DIFERENÇA	%
1	0.00351	0.00400	-13.0	
2	0.00836	0.00900	-7.0	
3	0.01261	0.01300	-3.0	
4	0.01609	0.01800	-0.8	
5	0.01896	0.02000	-5.8	
6	0.02170	0.02300	-5.5	
7	0.02391	0.02500	-4.4	
8	0.00801	0.00900	-8.8	
9	0.02040	0.01900	7.0	
10	0.03247	0.03100	5.0	
11	0.04286	0.04300	-0.5	
12	0.05175	0.05200	-0.5	
13	0.05993	0.05900	1.5	
14	0.06794	0.06700	1.5	
15	0.01144	0.01200	-4.5	
16	0.03975	0.02900	6.0	
17	0.05083	0.05100	-0.5	
18	0.06900	0.06900	0.0	
19	0.08496	0.08700	-2.5	
20	0.09961	0.10000	-0.5	
21	0.11438	0.11300	1.0	
22	0.01350	0.01400	-3.5	
23	0.03798	0.03800	0.0	
24	0.06480	0.06600	-2.0	
25	0.09007	0.09100	-1.0	
26	0.11278	0.11400	-1.2	
27	0.13370	0.13300	1.0	
28	0.15460	0.15300	0.5	
29	0.01459	0.01600	-9.0	
30	0.04260	0.04200	1.5	
31	0.07463	0.07500	-0.5	
32	0.10579	0.10700	-1.3	

continua

PLACA IV - MALHA 7 x 7

DEFLEXÕES EM POLEGADAS

P.TOS NODAIS	DIF. FINITA	EXPERIMENTAL	DIFERENÇA	%
33	0.13435	0.13600	-1.0	
34	0.16063	0.13600	-0.5	
35	0.18637	0.08500	0.5	
36	0.01520	0.01600	-6.5	
37	0.04578	0.04300	6.5	
38	0.08198	0.07900	3.5	
39	0.11809	0.11800	0.0	
40	0.15155	0.15300	-1.0	
41	0.18215	0.18500	-1.5	
42	0.21133	0.21100	0.0	
43	0.01502	0.01600	-5.0	
44	0.04813	0.04400	9.0	
45	0.08857	0.08200	7.0	
46	0.12948	0.12600	2.0	
47	0.16737	0.16700	0.0	
48	0.20140	0.20200	-0.5	
49	0.23666	0.22800	2.0	
50 até 64	0.00000	0.00000	0.0	

RESULTADOS P/ O GRÁFICO DE CONVERG.

DEFLEXÕES EM POLEGADAS (CANTO LIVRE)

MALHA	Nº	DIF. FINITAS	EXPERIMENTAL	DIFERENÇA %
3 x 3	9	0.255	0.228	18.0
4 x 4	16	0.245	0.228	7.5
5 x 5	25	0.237	0.228	4.0
6 x 6	36	0.235	0.228	2.9
7 x 7	49	0.233	0.228	2.0

TABELA VI-18

RESULTADOS P/ O GRÁFICO DE CONVERG.

DEFLEXÕES EM POLEGADAS (CENTRO)

MALHA	Nº	DIF. FINITAS	EXPERIMENTAL	DIFERENÇA %
3 x 3	0.093 *	0.069	25.8
4 x 4	6	0.081	0.069	14.8
5 x 5	0.076 *	0.069	9.2
6 x 6	15	0.072	0.069	4.1
7 x 7	0.070 *	0.069	1.4

TABELA VI-19

OBS: OS VALORES DAS DEFLEXÕES NO CENTRO P/ MALHAS:
 3x3, 5x5 e 7x7, CORRESPONDEM A VALORES OBTIDOS
 POR INTERPOLAÇÃO GRÁF. (ASSINALADOS POR *)

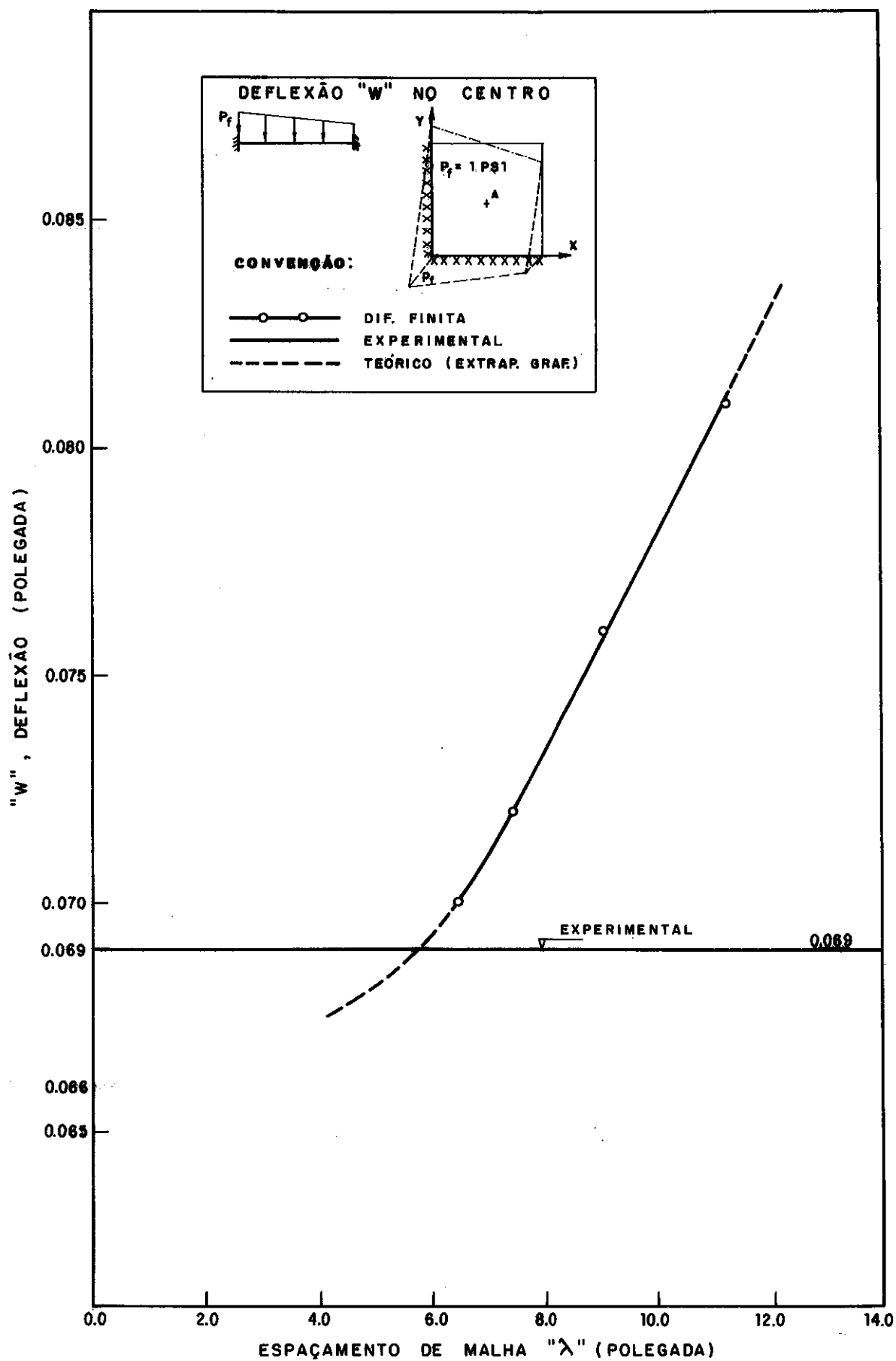


GRÁFICO VI-7

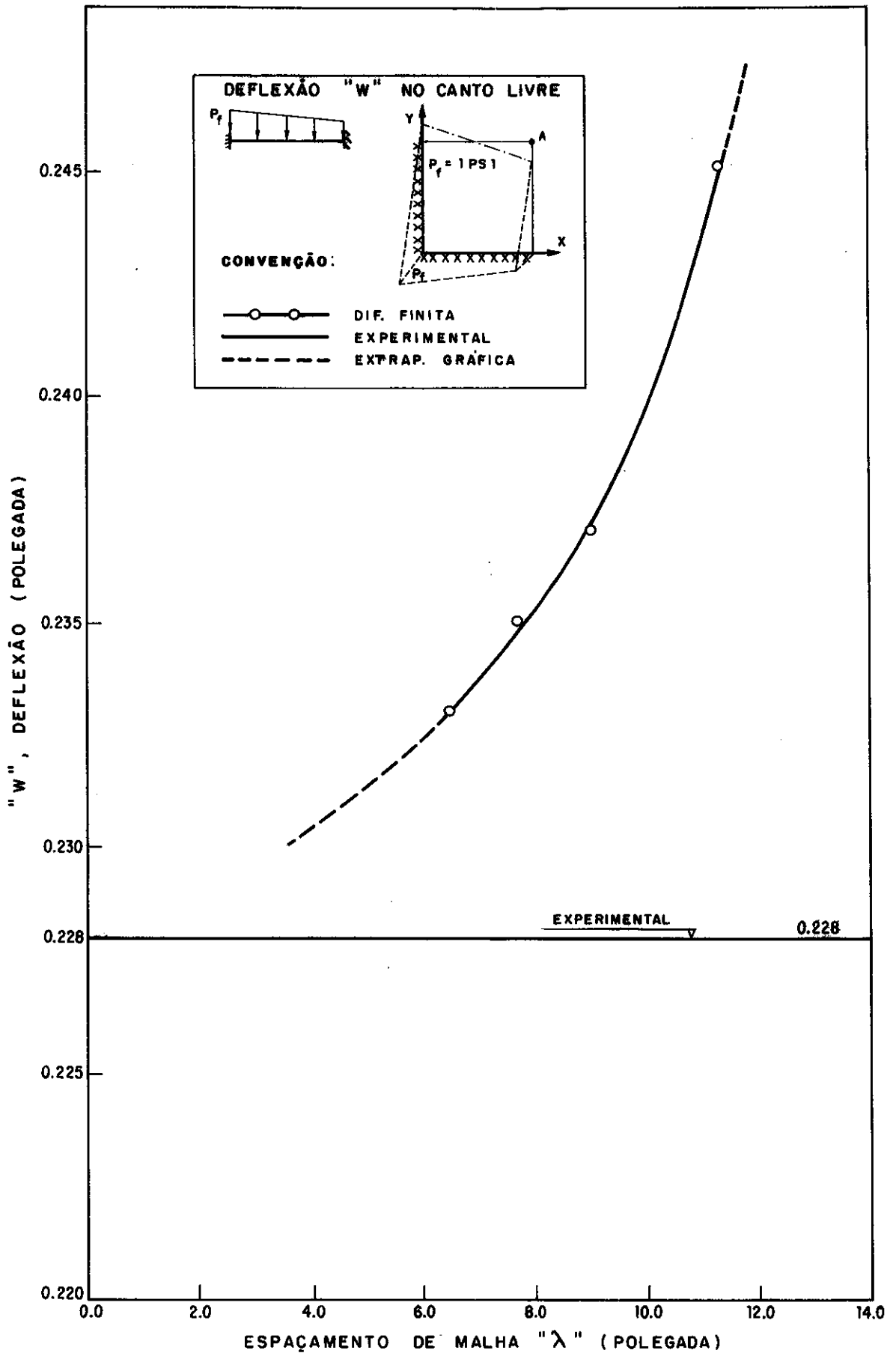


GRÁFICO VI - 8

PLACA IV - MALHA 6 x 6

MOMENTOS DE CONTORNO EM Lb x pol./pol.

MOMENTOS NO ENGASTAMENTO

P.TOS	DIFERENÇAS FINITAS			ELEMENTOS FINITOS		
NODAIS	Mx	My	Mxy	Mx	My	Mxy
37	-93.06	-27.92	0.00	-136.49	-40.94	6.878
38	-92.21	-27.66	0.00	-140.80	-42.24	-1.22
39	-87.01	-26.10	0.00	-122.72	-36.81	0.24
40	-76.63	-22.98	0.00	-101.91	-30.57	0.18
41	-56.44	-16.93	0.00	-70.30	-21.09	-0.436
42	-26.32	-7.89	0.00	-27.47	-8.24	0.273
43	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	6.961
44	-7.89	-26.32	0.00	-8.41	-28.05	-1.802
45	-17.89	-59.65	0.00	-22.28	-74.27	-0.438
46	-26.25	-87.51	0.00	-34.06	-113.53	0.098
47	-32.81	-109.36	0.00	-43.73	-145.79	0.148
48	-38.59	-128.65	0.00	-53.49	-178.30	-1.557
49	-43.49	-145.98	0.00	-56.21	-187.37	8.085

MOMENTOS NO BORDO LIVRE

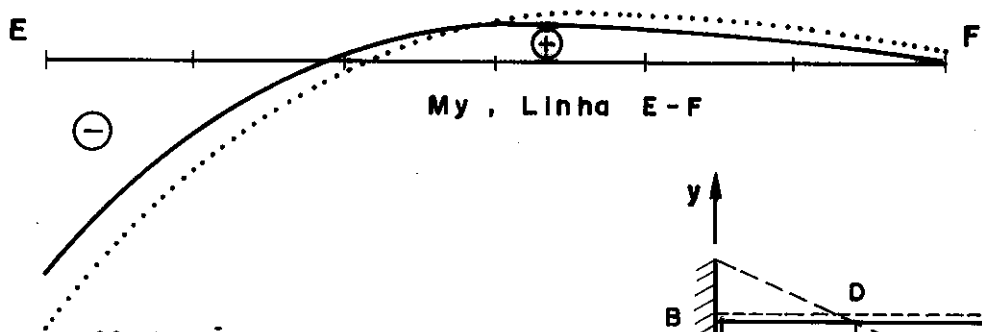
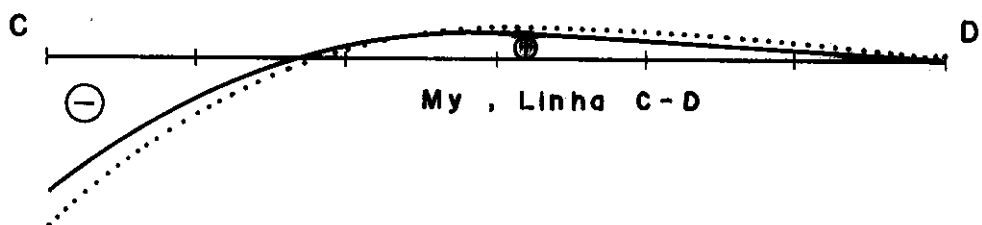
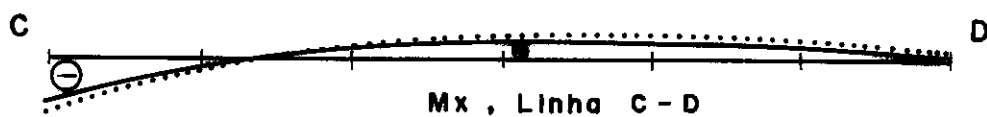
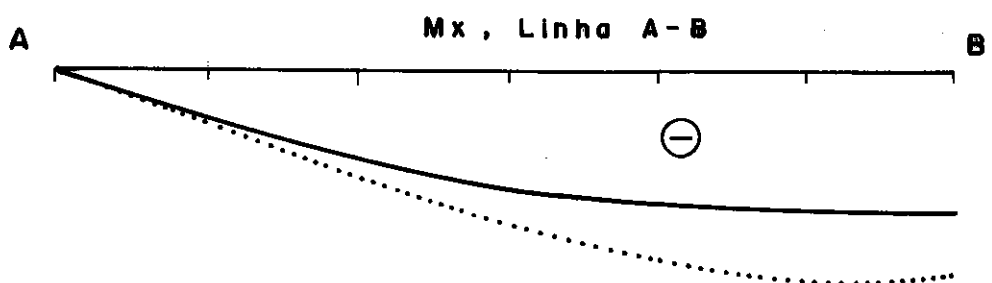
6	0.00	-44.58	9.92	11.42	-73.36	11.92
12	0.00	4.39	17.51	1.26	-4.03	23.76
18	0.00	22.44	13.77	2.49	26.10	21.49
24	0.00	21.33	9.25	1.31	29.54	15.53
30	0.00	11.42	5.37	1.22	19.24	9.45
36	0.00	0.00	0.00	-2.27	-8.17	5.51
35	6.55	0.00	5.94	15.41	-2.28	9.47
34	10.62	0.00	9.27	18.71	-2.76	14.58
33	4.63	0.00	11.19	9.46	-2.96	18.21
32	-12.74	0.00	10.89	-18.17	-2.53	17.67
31	-34.01	0.00	2.64	-71.11	-9.79	5.94

PLACA IV - MALHA 6 x 6

MOMENTOS NA REGIÃO CENTRAL EM lb x pol./pol.

P ^T OS NODAIS	DIFERENÇAS FINITAS			ELEMENTOS FINITOS		
	Mx	My	Mxy	Mx	My	Mxy
13	-21.98	-2.14	12.26	-31.99	-5.97	14.35
14	3.42	11.26	15.96	1.69	10.65	21.96
15	12.15	18.19	14.77	14.17	19.72	23.57
16	11.74	20.72	12.06	15.16	23.50	22.07
17	6.97	21.32	10.27	10.84	24.68	20.81
3	-2.96	-18.96	8.81	-6.56	-30.23	18.40
9	8.87	16.02	13.57	8.71	8.59	24.63
21	10.15	13.42	14.04	13.34	16.15	19.94
27	6.54	5.16	13.10	10.04	7.56	17.22

Distribuição de momentos p/ malha 6x6



CONVENÇÃO:

- DIF. FINITA
- ELEM. FINITO
- //// ENGASTE
- ==== LIVRE

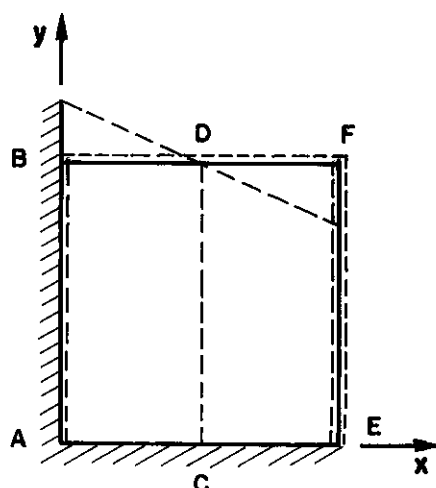
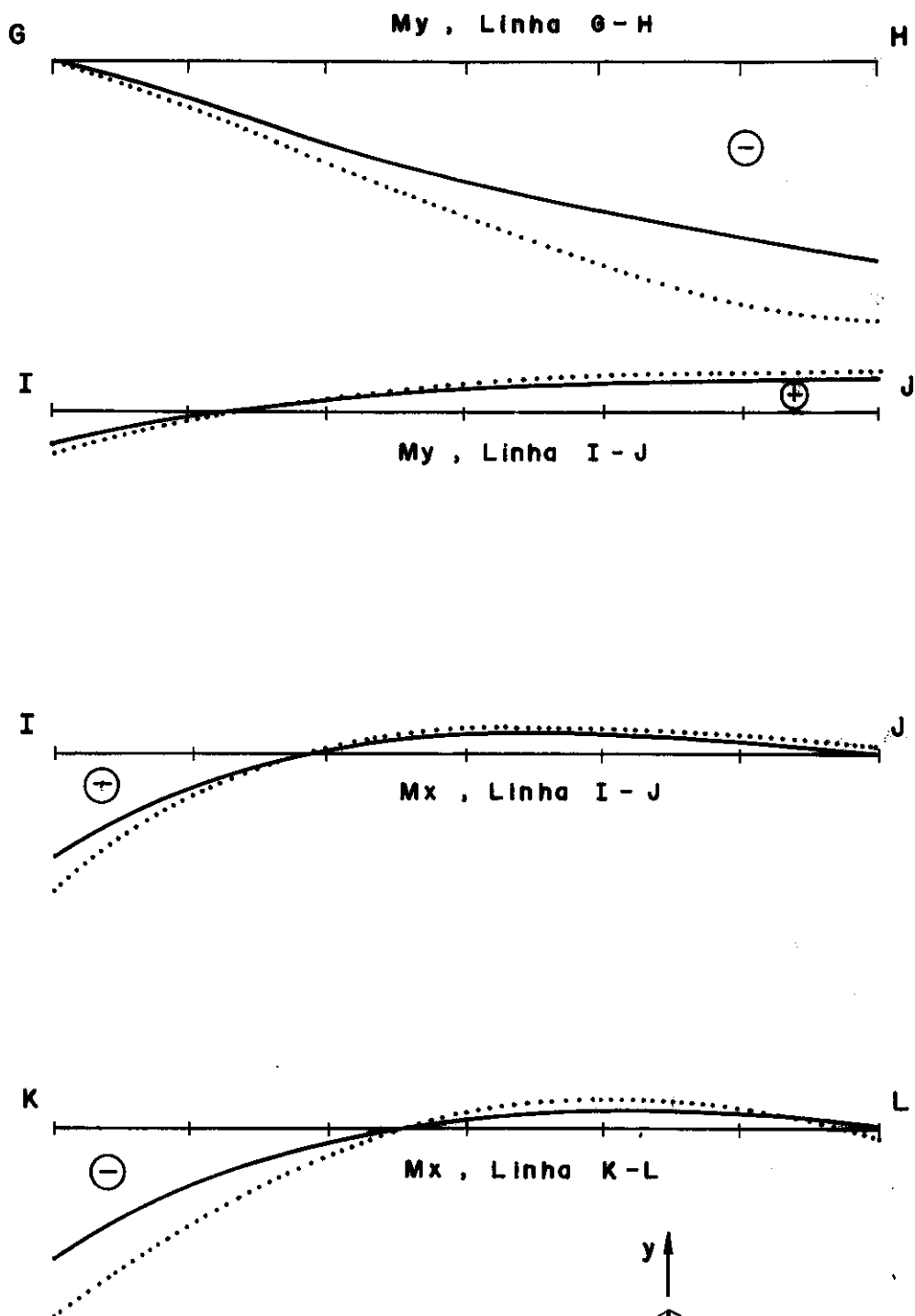


Gráfico VI-9

Distribuição de momentos p/ malha 6x6



CONVENÇÃO:

- DIF. FINITA
- ELEM. FINITO
- //// ENGASTE
- == LIVRE

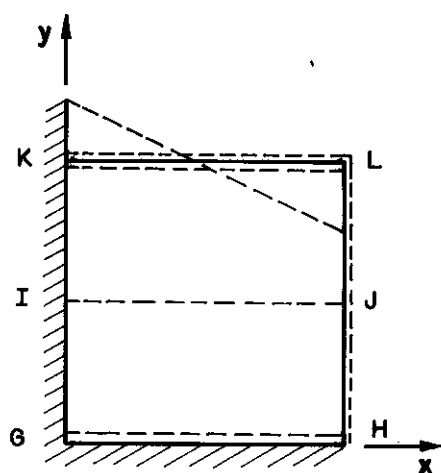


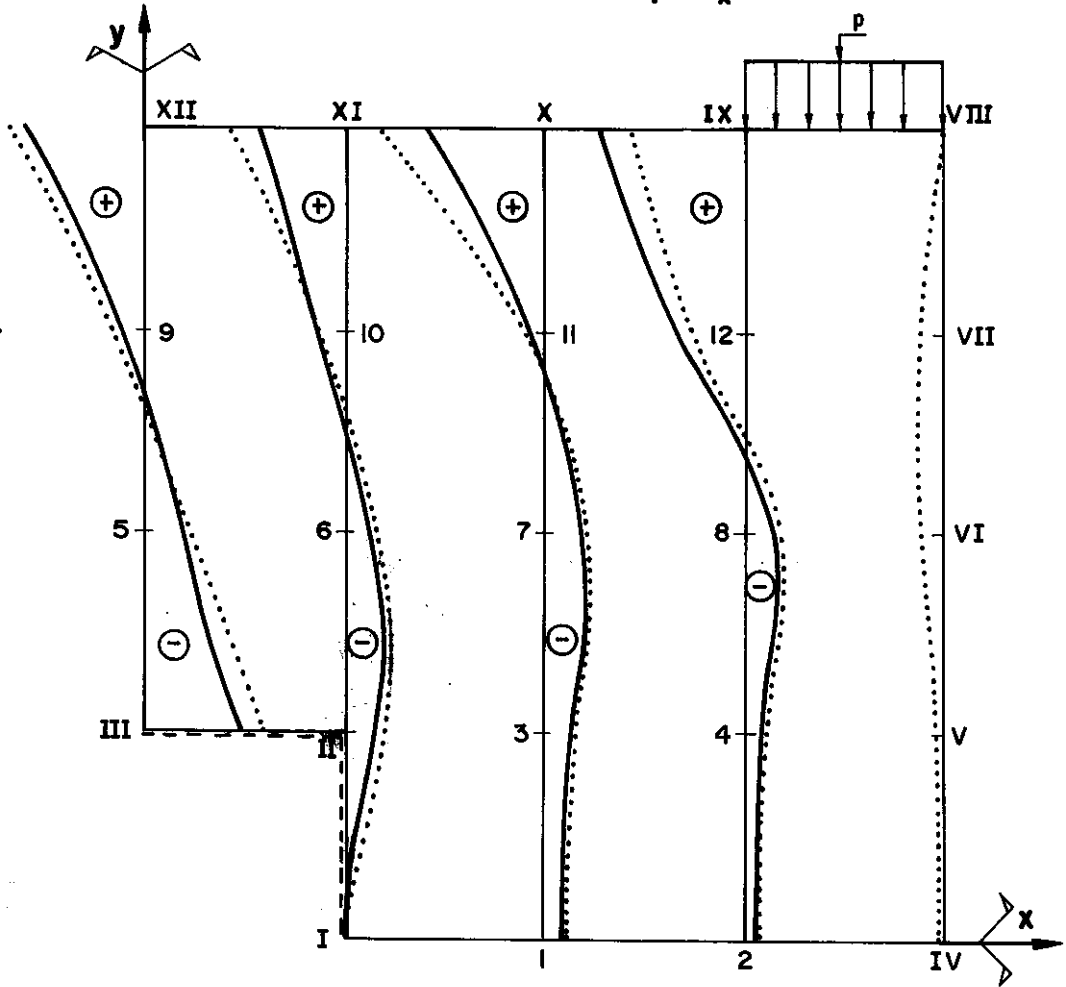
Gráfico VI-10

CHAPA . RESULTADOS

TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO EM TF/M ² /M						
P.TOS NODAIS	DIFERENÇAS FINITAS			ELEMENTOS FINITOS		
	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}
1	-0.0302	-0.2596	0.0000	-0.0362	-0.2336	0.0045
2	-0.0151	-0.3281	0.0000	-0.0183	-0.3951	-0.0025
3	-0.0642	-0.2232	-0.2131	-0.0820	-0.2116	-0.2330
4	-0.0221	-0.3888	-0.2360	-0.0299	-0.4226	-0.3140
5	-0.0967	-0.0188	0.0000	-0.1238	-0.0161	-0.0012
6	-0.0684	-0.0331	-0.418	-0.0713	-0.0288	-0.3560
7	-0.1074	-0.1560	-0.6680	-0.1133	-0.1276	-0.7600
8	-0.1050	-0.3664	-0.4830	-0.1330	-0.3980	-0.5510
9	0.0610	0.0094	0.0000	0.0940	0.0087	-0.0032
10	0.0760	0.0061	-0.5350	0.0750	0.0075	-0.3800
11	0.0450	-0.0244	-0.6100	0.0360	-0.0185	-0.6000
12	0.1890	-0.2435	-0.403	0.1410	-0.3364	-0.2610
I	0.0000	-0.1035	0.0000	0.0485	-0.0855	-0.0048
II	-0.1225	-0.0668	0.2160	-0.1849	-0.0449	0.1450
III	-0.2639	0.0000	0.0000	-0.3246	0.0119	0.0059
IV	0.0000	-0.4960	0.0000	0.0008	-0.6240	0.0008
V	0.0000	-0.3940	0.0000	0.0056	-0.5760	-0.0076
VI	0.0000	-0.4150	0.0000	0.0630	-0.7710	-0.0250
VII	0.0000	-0.5870	0.0000	0.0663	-0.9950	-0.0227
VIII	0.0000	-1.0000	0.0000	-0.0137	-1.2450	0.0057
IX	0.4150	-1.0000	0.0000	0.3101	-0.558	-0.0230
X	0.3360	0.0000	0.0000	0.4690	-0.0006	0.0180
XI	0.2380	0.0000	0.0000	0.3140	-0.0015	0.0086
XII	0.3352	0.0000	0.0000	0.3704	-0.0004	-0.0008

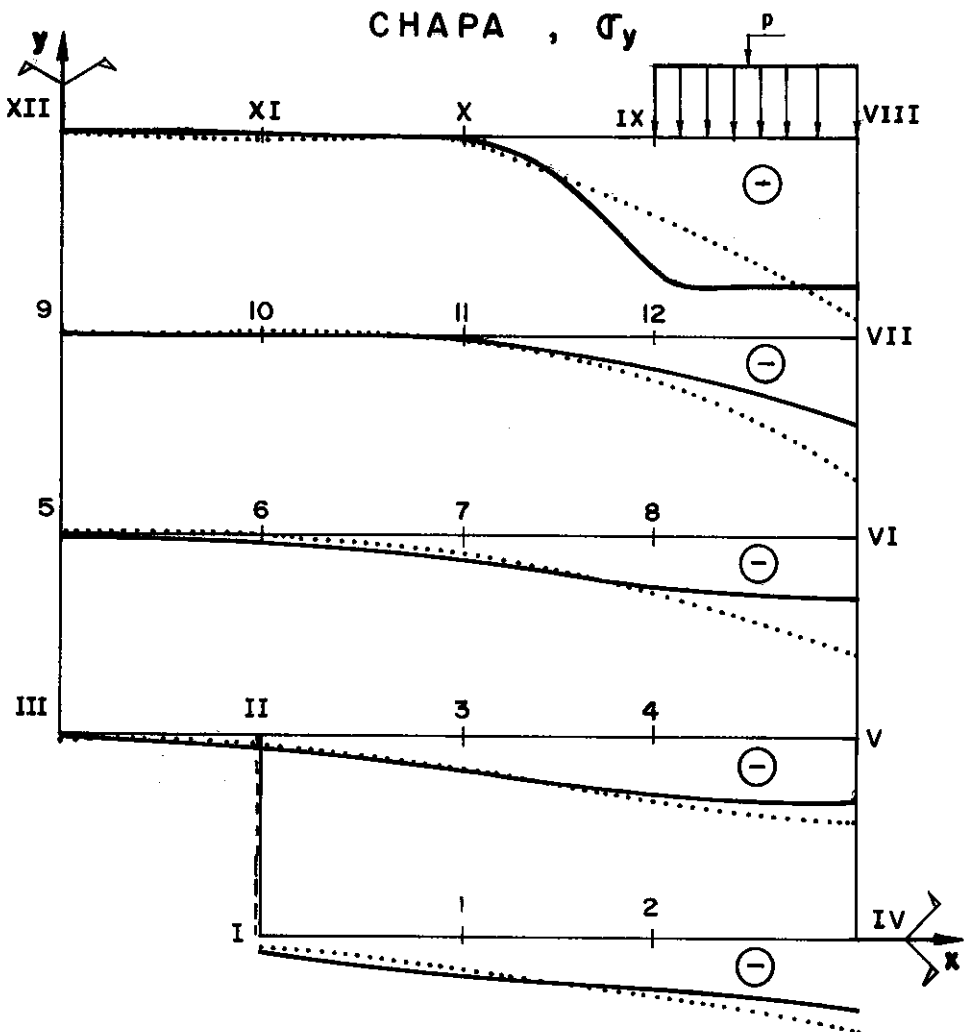
TABELA VI-22

CHAPA , σ_x



CONVENÇÃO:

— DIF. FINITAS
 ELEM. FINITOS



CONVENÇÃO:

— DIF. FINITAS

..... ELEM. FINITOS

Gráfico VI-12

6.3. Análise e Conclusão.

Placa I:

a) W (deflexões).

O exame das tabelas VI-1 e VI-3 revela-nos uma diferença mais acentuada entre os resultados apresentados pelos dois métodos nos pontos do contorno do orifício, sendo, que esta diferença foi de 11% para a malha de 3x3, chegando até 20% para a malha de 6x6. Notamos também, que os valores apresentados pelo método dos Elementos Finitos foram sempre superiores em grandeza nesses pontos.

Para pontos do domínio, a diferença entre os valores apresentados pelos dois métodos foi bastante pequena, sendo a diferença percentual média da ordem de 5%.

b) M_x e M_y (momentos fletores).

Pontos do contorno do orifício.

As tabelas VI.2 e VI.4 permitem-nos constatar uma melhor precisão dos resultados para o método das diferenças finitas. Estes valores são exatos e independem do refinamento da malha, pois correspondem a condições estáticas de contorno no bordo livre da placa. ($M_x=0$, $M_y=0$). No método dos elementos finitos (para o elemento retangular não conforme) estas condições estáticas não são impostas, porém com o refinamento da malha elas tendem a ser satisfeitas. Observamos através das tabelas VI.2 e VI.4, que os valores de M_x e M_y , que deveriam ser nulos para pontos do bordo livre respectivamente (condições de bordo livre nas direções x e y), apresentam um "valor residual" próximo de zero e que tenderia a anular-se com o refinamento da malha. Valores não correspondentes a condições de bordo livre ($M_x \neq 0$ e $M_y \neq 0$) em pontos do contorno do orifício apresentaram-se maiores para o método dos elementos finitos

constatando-se uma diferença média da ordem de 19%,

Pontos pertencentes ao domínio:

Para esses pontos os dois métodos apresentaram valores mais próximos (em relação aos obtidos para pontos de contorno), resultando uma diferença percentual média de 15%. Os resultados obtidos entre os dois métodos, mostraram um melhor ajustamento, se comparados com os obtidos pelas placas II e III.

É conveniente salientar, que os valores obtidos por elementos finitos foram em sua maioria sempre superiores em grandeza aos obtidos por diferenças finitas.

Para os pontos do contorno externo (bordo engastado), os valores de M_x e M_y obtidos pelos dois métodos apresentaram uma diferença percentual que variou de 0% (canto fixo) até 19% (ponto central do bordo), sendo que os valores obtidos por elementos finitos foram progressivamente superiores aos obtidos por diferenças finitas.

c) M_{xy} (momento torsor)

Os resultados obtidos por diferenças finitas para momentos torsores foram inferiores aos obtidos por elementos finitos, mormente para os pontos do domínio, e pontos do contorno do orifício, porém para os pontos de simetria e do bordo engastado os resultados obtidos por diferenças finitas são exatos ou seja exibem valor nulo, (como era de se esperar), enquanto que os

obtidos por elementos finitos apresentaram um pequeno valor residual, que tende a anular-se com o refinamento da malha.

Placa II:

a) W (deflexões).

Pelo exame das tabelas VI-5 e VI-7 nota-se claramente uma grande superioridade dos valores obtidos por elementos finitos em relação aos calculados por diferenças finitas, principalmente nos pontos do contorno do orifício, chegando-se a uma diferença percentual de até 40%.

Verifica-se, que para os pontos do domínio a diferença entre os resultados obtidos pelos dois métodos apresenta-se ainda bastante alta, constatando-se uma diferença média da ordem de 30%.

b) M_x , M_y (momentos fletores).

Observando as tabelas VI-6 e VI-8, constata-se como no exemplo anterior, que os valores dos momentos fletores correspondentes as condições de bordo livre no contorno do orifício e nos bordos externos simplesmente apoiados obtidos por diferenças finitas são exatos, independente da malha utilizada, enquanto os obtidos por elementos finitos apresentam um pequeno valor residual para as malhas utilizadas.

Nota-se também, que os valores obtidos por elementos finitos para esses pontos do contorno do orifício (excetuando-se as condições de bordo livre), apresentam superioridade em relação aos valores obtidos por diferenças finitas, constatando-se uma diferença percentual de até 35%.

Nos pontos pertencentes ao domínio, os valores obtidos por elementos finitos foram ligeiramente superiores em grandeza, aqueles determinados por diferenças finitas, chegando-se a uma diferença percentual média de 10%.

c) M_{xy} (momento torsor).

Como no exemplo anterior observamos pelo exame das tabelas VI.6 e VI.8, que os valores obtidos para o momento torsor por diferenças finitas são inferiores em grandeza aos resultantes por elementos finitos, mormente os pontos do domínio constatando-se uma diferença percentual de 20%, para as duas malhas utilizadas. Como já era de se esperar nos pontos de simetria os valores obtidos por diferenças finitas são exatos ($M_{xy} = 0$) e independem da malha utilizada, no entanto os obtidos por elementos finitos apresentam um pequeno valor residual, que tende anular-se com o refinamento da malha.

Nos pontos do contorno do orifício e do contorno externo simplesmente apoiado, os valores obtidos por elementos finitos foram superiores em grandeza aos obtidos por diferenças finitas, constatando-se uma diferença percentual média de até 30%.

Placa III:

a) W (deflexões)

Pelo exame das tabelas VI.9 e V.11, nota-se que os valores obtidos para os pontos do contorno do orifício por elementos finitos foram superiores em grandesa aos obtidos por diferenças finitas, constatando-se uma diferença porcentual da ordem de 18%, referente a malha (3x3) e uma diferença da ordem de 25% referente a malha de (6x6).

Para pontos do domínio, esta diferença passou a ser bastante pequena, constatando-se uma diferença porcentual média de 5% para a malha de (3x3) e de 12% para a malha de (6x6).

b) M_x , M_y (momentos fletores).

As mesmas observações relativas aos exemplos anteriores podem ser colocadas para representar os resultados obtidos para pontos do contorno do orifício, em que os valores obtidos por diferenças finitas (correspondentes a condições de bordo livre : para $M_x = 0$ e $M_y = 0$); foram exatos, enquanto os obtidos por elementos finitos apresentaram um resíduo que tende a diminuir com o refinamento da malha, assim como para pontos do contorno externo simplesmente apoiado.

Nos pontos do domínio os resultados apresentados pelos dois métodos apresentaram uma diferença porcentual média de 10%

para a malha de (3x3), enquanto que para a malha de (6x6) essa diferença chegou a 15%. É conveniente mais uma vez salientar que os valores obtidos por elementos finitos foram para a grande maioria dos pontos, superiores em grandeza aos obtidos por diferenças finitas.

As tabelas VI-10 e VI-12 nos mostram uma progressiva superioridade em grandeza nos valores obtidos por elementos finitos nos pontos do bordo engastado em comparação com os obtidos por diferenças finitas, constatando-se uma diferença porcentual média de 19% (malha 3x3) e de 25% para a malha de (6x6).

c) M_{xy}

De um modo geral como nos exemplos anteriores os valores para o momento torsor por elementos finitos foram sempre superiores em grandeza aos de diferenças finitas.

Nos casos particulares em que o momento torsor é nulo ou seja, pontos de simetria da peça e pontos do contorno externo engastado, os valores obtidos por diferenças finitas permaneceram sempre nulos independente da malha, enquanto os obtidos por elementos finitos foram valores desprezíveis, que tendem a anular-se com o refinamento da malha.

Em geral para pontos do domínio e do bordo simplesmente apoiado a diferença porcentual média entre os valores obtidos pelos dois métodos foi da ordem de 18%.

Placa IV:

Pelo exame das tabelas VI.13 até VI.17, são comparadas as deflexões obtidas teoricamente (diferenças finitas) e pela análise experimental. Pode-se observar que as soluções resultantes do uso de 36 e 49 equações (malhas 6x6 e 7x7), aproximam-se muito favoravelmente das soluções obtidas pela investigação experimental³. Os gráficos de convergência, nos quais são plotadas as deflexões(w) versus espaçamento de malha (λ), usadas nas equações por diferenças finitas, referem-se as deflexões no ponto central da placa e no canto livre respectivamente. O valor experimental observado está sobreposto a linha horizontal cheia, como observamos nos gráficos de convergência.

Em todos os casos, os valores obtidos para um espaçamento de malha de 7,5" pol. ou (19.05cm), corresponde a 36 pontos nodais, aproximam-se muito favoravelmente daqueles obtidos experimentalmente. Quando o espaçamento de malha(λ) aproximam-se de zero o número de pontos nodais tende ao infinito, e portanto os resultados aproximam-se de um valor constante. Este valor seria igual ao valor, que obteria-se através da solução matemática rigorosa da equação de Lagrange.

Esta análise está restrita a observação e predição do comportamento estrutural de uma placa de alumínio de 1/2 polega

da de espessura, quando sujeita a um carregamento normal distribuído variando linearmente até o bordo inclinado. Se tivéssemos assumido, que esta placa fosse de concreto armado, e este material considerado como homogêneo e com momento de inércia constante, estes resultados através dos princípios de semelhança da análise experimental, poderiam ser usados para predizer-se o comportamento estrutural de uma placa tipo contra-forte de concreto armado geométricamente similar ao modelo, quando submetida a um tipo semelhante de carregamento.

Discussão:

Muitos fatores podem ter influenciado os resultados da análise teórica e experimental. Citaremos a seguir alguns destes fatores mais importantes:

1. A simplificação do bordo inclinado:

Visto que, o carregamento aproxima-se de zero neste bordo, foi decidido que esta simplificação seria justificada. Ignorando-se outros possíveis erros de compensação o ajustamento entre os resultados teórico e experimental³ indicaram que esta simplificação foi válida.

2. Erros de arredondamento nos coeficientes, das equações, escritas em diferenças finitas.

3. Efeito do esforço cortante sobre as deflexões.

A formulação teórica para as equações da teoria das placas delgadas, utilizada neste trabalho, ignoram os efeitos do esforço de corte sobre as deflexões. Esta omissão por certo tendeu a fazer com que as deflexões obtidas teoricamente fossem menores do que as obtidas pela investigação experimental.³

4. O tamanho do espaçamento das malhas.

Certamente o tamanho dos espaçamentos de malha usados no método das diferenças finitas, afetaram os resultados teóricos. Os gráficos de convergência, indicam claramente este efeito.

5. A fixação dos bordos da placa.³

A completa fixação dos bordos (engastamento), não pôde ser praticamente atingida no modelo. Foram observadas deformações abaixo de cada um dos bordos fixos (engastados), que indicaram rotações desprezíveis nos suportes.

Algumas rotações foram reduzidas pelo enrijecimento dos canais de suportes pela colocação de carregamento sobre estes. A fixação real dos bordos engastados, concebida na análise teórica tendeu a fazer as deflexões obtidas teoricamente, menores do que as verificadas experimentalmente.³

6. Forças de membrana.

A linearidade das curvas carga-deflexão obtidas na análise experimental,³ indicaram a existência de insignificantes forças de membrana para a placa em estudo.

Forças de membrana foram desprezadas na análise teórica.

7. Espessura da placa.³

Medições da espessura, tomadas em vários pontos do modelo, indicaram uma variação de apenas 0.005 polegadas em 0.500 polegadas de comprimento de placa. A placa foi portanto, considerada como sendo de espessura constante.

8. Homogeneidade da placa:³

Os testes de tensão das amostras (tomados em ângulos retos) indicaram mutuamente, que poderiam ser assumidas semelhantes propriedades físicas.

9. Simulação da carga distribuída.³

Um número suficiente de cargas concentradas individuais, foi usado para aproximar a carga distribuída da utilizada na análise teórica por diferenças finitas.

Chapa I - Análise dos Resultados.

A tabela VI-22 apresenta os valores das tensões nos pontos da malha (8x8); os gráficos a distribuição de tensões.

Tensão σ_x :

Apresenta valores bem razoáveis em todos os pontos, principalmente para os do domínio em que a diferença percentual média entre os resultados obtidos pelos dois métodos foi da ordem de 15%.

No contorno externo e no orifício central a diferença entre os resultados obtidos pelos dois métodos foi bastante significativa, mormente nos pontos do bordo superior. Constatou-se uma diferença percentual média em torno de 20%.

O bordo superior é tracionado, diminuindo a tensão de tração do centro para a periferia. A medida que se penetra no interior da placa, a tensão de tração diminui. Na altura da linha média já se nota uma significativa tensão de compressão, esta já se torna uma considerável tensão de compressão na altura do bordo superior do orifício, diminuindo do centro do mesmo para o canto lateral. A partir daí, a tensão de compressão diminui bastante, sendo praticamente nula nos pontos pertencentes ao contorno vertical do orifício, e diminuindo consideravelmente até

o eixo de simetria horizontal, sendo nula no centro do bordo do orifício (ponto I) e do contorno lateral externo na periferia da chapa. (Ponto IV).

Tensão σ_y :

Apresenta bons resultados, mormente nos pontos do domínio, em que se constatou diferença percentual média da ordem de 8%, entre os resultados obtidos pelos dois métodos. Nos pontos do contorno, principalmente os do bordo lateral externo, os dois métodos apresentaram resultados, que demonstraram uma diferença significativa, esta em termos percentuais chegou até 25%.

O bordo superior quase totalmente comprimido, apresenta uma tensão unitária máxima, localizada no canto externo onde se situa o carregamento, esta diminui consideravelmente até o terço médio do bordo superior, chegando a anular-se nos pontos (X e XI), até atingir o centro do bordo superior em que, apresenta uma significativa tensão de tração (p^{to} XII).

Para as demais seções, o comportamento é semelhante ao do bordo superior, ou seja apresenta uma considerável tensão de compressão no bordo externo lateral; esta diminui consideravelmente até atingir o centro da chapa na altura do eixo vertical de simetria, onde é praticamente nula.

Nos pontos do bordo superior do orifício a tensão de compressão atuante só é significativa no canto (p^{to}_{II}), esta diminui consideravelmente, praticamente se anulando, até atingir o centro do bordo do orifício (p^{to}_{III}), onde se anula.

Finalmente, na altura do eixo de simetria horizontal, a tensão de compressão já é significativa desde o centro do bordo lateral do orifício (p^{to}_I); aumenta consideravelmente até atingir o contorno externo periférico da chapa (p^{to}_{IV}).

Tensão τ_{xy} :

Apresenta bons valores, mormente nos pontos dos bordos superior e lateral, além dos pontos sobre os eixos de simetria, onde deve ser nula. Aumenta de valor absoluto ao aproximar-se dos pontos centrais e próximos do bordo superior ($p^{tos}_{10, 11}$ e 12), possuindo nestes pontos e seus adjacentes valores bem significativos. A diferença porcentual média entre os resultados obtidos pelos dois métodos, mormente para os pontos do domínio foi da ordem de 15%.

CONCLUSÕES

Como se sabe, o Método dos Elementos Finitos e os da Diferenças Finitas são conceitualmente bem diferentes.

O primeiro consiste em dividir o contínuo em elementos, tratando-se de uma aproximação física do real e, através de superposição, chegar-se a um sistema linear. O segundo consiste na substituição das equações diferenciais e condições de contorno, em um número finito de incógnitas, referidas a pontos discretos, dentro ou fora do contorno, Trata-se, pois, de uma aproximação matemática do real, formando as equações de Diferenças Finitas um sistema de equações lineares.

Os resultados obtidos por diferenças finitas, em coordenadas cartesianas retangulares, se apresentaram razoavelmente bons, principalmente na análise do comportamento à flexão de placas com o contorno externo engastado ou livre; estas foram: a placa I e a Placa IV

Com respeito à chapa duplamente conexa, os resultados foram bons, mormente nos pontos internos. Nos pontos do contorno do orifício, sobretudo no canto, onde deve haver concentração de tensões, observa-se uma diferença mais acentuada entre os resultados das tensões normais entre os dois métodos (da ordem de 30%). Ao longo dos bordos do orifício anulam-se no centro, mas

apresentaram valores residuais nos demais pontos. Como era de se esperar, o método das diferenças finitas apresentou-se mais exato neste aspecto.

O autor deseja chamar atenção para os valores numéricos dos coeficientes do sistema linear em Diferenças Finitas, de uma maneira particular, para os coeficientes centrais, ou seja, aqueles que, em valor absoluto, são bem maiores que os demais. Qualquer variação neles, mormente nos de maior grandeza, determinará respostas bem diferentes para o sistema. Note-se que estamos falando de erros inferiores à 3% nos coeficientes centrais da molécula.

O próprio autor constatou, que as raízes mudaram completamente e, com elas, a distribuição de tensões nas chapas; o campo de deslocamentos na flexão das placas também sofreu alterações, inclusive mudança de sinal.

Conforme se pode observar no presente trabalho, as condições de contorno são tratados com extrema simplicidade. Espera-se, com isto, dar uma contribuição válida ao estudo da flexão de placas retangulares com orifícios e com bordos livres, assim como, de chapas multiplamente conexas, pois, embora a teoria seja bem conhecida, sua aplicabilidade a casos especiais é praticamente desconhecida. Não só os pontos externos, fictícios, são de fácil determinação, como também, a montagem das equações lineares, graças aos operadores moleculares, conforme se pode constatar no texto.

Como se disse na introdução, o grande volume de cálculo torna imprescindível a utilização de computador; mas uma automatização total do cálculo, será certamente muito difícil. Pela generalidade dos problemas abordados, este trabalho não foi totalmente automatizado, mesmo porque, essa não era nossa pretensão.

O que se afirmou no parágrafo anterior é de capital importância, pois o estudo "comparativo" entre os dois métodos (Dif. Finitas e Elementos Finitos), a que nos referimos na Introdução, não tem a pretensão de analisar a eficiência e compacidade de programação, influência do tempo na programação etc., portanto de sejamos tão somente estabelecer comparações entre os resultados obtidos pelo dois métodos nos casos estudados. As comparações que, por ventura, aparecem são extensíveis tão somente a problemas análogos, isto é:

- 1) Placas Retangulares esgastadas ou simplesmente apoiadas, de espessura delgada com um orifício central, sujeitas a carregamento transversal uniformemente distribuído.
- 2) Placa Retangular de espessura delgada tipo contra-forte (en-

gastada em dois bordos adjacentes e livres nos outros dois), sujeita a carregamento transversal linearmente distribuído .

- 3) O problema da conexão múltipla, aplicado a uma chapa retangular, de espessura delgada, com carregamento no contorno, atuando no próprio plano da chapa.

A potencialidade do método dos Elementos Finitos e a sua total automatização, através do sistema de linguagem Lorane Linear, e outros, que tornaram o assunto mais acessível aos estudos, constituem argumentos favoráveis aos Elementos Finitos.

Resumindo as conclusões, procurar-se-ão sintetizar os aspectos mais importantes, que irão determinar a maior ou menor aplicabilidade e amplitude do Método das Diferenças Finitas, sempre tendo em vista o problema específico.

O Método das Diferenças Finitas, largamente utilizado na análise numérica, bem como na solução de problemas na flexão de placas delgadas e da teoria da elasticidade, exige:

- a) Definição do tipo de malha e daí do sistema de coordenadas , função também da configuração do contorno. No caso de contornos irregulares e de variadas condições de bordo, a geração do sistema linear torna-se bastante complexa, mormente se o pretendido for a automatização completa dos cálculos. Deve-se procurar uma malha, que se adapte convenientemente ao contorno.

- b) As condições de bordo, pontos de contorno e pontos externos, que inicialmente apresentavam dificuldades na sua determinação, tornam-se bastante simples. Em alguns casos de carregamentos porém, essa simplicidade pode inexistir.
- c) A resposta do sistema é, altamente sensível a pequenas variações dos coeficientes da molécula, em particular, os de maior valor absoluto, (que são os centrais)
- d) O método da Diferença Finita parece mostrar maior sensibilidade nos pontos do contorno, onde houver concentração de tensões. O método dos Elementos Finitos parece não ter tanta sensibilidade, para os elementos utilizados.
- e) O grande volume de cálculo exige a automatização, nem sempre possível na sua totalidade, devido às características dos problemas. O sistema linear de equações foi implementado pelo método de Gauss e resolvido no sistema B-6700, instalado no Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

De observações ao longo deste trabalho podemos induzir que:

- a) O método das Diferenças Finitas para a solução aproximada de equações diferenciais dos tipos comumente encontrados nos fenômenos da engenharia, é muito simples e o mais direto método

do de análise numérica.

- b) Com o advento de computadores digitais de alta velocidade, sistemas de equações algébricas lineares simultâneas podem ser resolvidos economicamente.
- c) O método das Diferenças Finitas, apresenta bons resultados para placas do tipo engastado-livre e sujeitas aos carregamentos aplicados nos exemplos apresentados, mormente quando um sistema de malha com 30 a 40 nós é utilizado.

6.4. Aplicabilidade do Método das Diferenças Finitas

Torna-se praticamente inviável com os conceitos atualmente existentes, a elaboração de um programa automático para a aplicação do método das diferenças finitas que seja geral, isto é, um programa automático que calcule placas para os mais variados contornos, orifícios e condições de apoio. Entretanto, no estudo de um problema específico definido, podemos empregar o método das Diferenças Finitas tornando a resolução relativamente simples; sua aplicação aos problemas específicos apresentados neste trabalho, nos dão uma idéia do valor desse método.

É fato inegável que este processo numérico tem tido sua importância diminuída com a expansão do mais novo e poderoso instrumento de cálculo que é o método dos elementos finitos.

Salienta-se que na época em que o método das Diferenças Finitas encontrava-se em fase de desenvolvimento, os pesquisadores ainda não possuíam a facilidade de utilização de computadores. É natural portanto que existam pouquíssimos programas específicos publicados para a utilização do método das diferenças finitas.

Desde que exista um estudo dirigido no sentido de automatizá-lo, podem-se com ele obter programas pelo menos parciais. A principal dificuldade no que se refere à automatização total é a existência de pontos fictícios externos ao contorno. Seria também válida uma pesquisa no sentido de se evitar tais pontos, com a introdução de novos conceitos, isto é, uma melhor maneira no tratamento das condições de bordo.

Podemos citar os seguintes fatos que caracterizam a aplicabilidade do método das Diferenças Finitas, mas que jamais podem ser considerados como vantagens em relação ao método dos elementos Finitos, dada a generalidade deste, principalmente no trato das condições de contorno e disposição das malhas:

- a) Menor ordem do sistema de equações para um mesmo número de pontos nodais. Para o caso em estudo teremos uma equação por ponto nodal para diferenças finitas e três para elementos finitos. No caso de elementos mais refinados, teremos mais equações por ponto nodal.

- b) As fases da análise do problema, ao contrário do método dos elementos finitos não são laboriosas, dado que as equações diferenciais que regem o corpo em estudo, são sempre conhecidas.
- c) Pode-se aplicar o método (como nos casos estudados), mesmo que não se disponha de um programa inteiramente automático. Monta-se facilmente o sistema de equações, fazendo apenas sua resolução no computador. Para o método dos Elementos Finitos é impraticável a sua utilização sem um programa completo, mesmo para os elementos menos refinados.
- d) Como em diferenças finitas a automatização é normalmente específica, existe facilidade da entrada de dados em um programa. Para elementos finitos torna-se trabalhosa, principalmente quando utilizamos elementos mais refinados.

6.5. Sugestões e Continuidade da Pesquisa.

O presente trabalho pode ter continuado tornando o estudo comparativo mais amplo, utilizando para as placas e chapas analisadas:

- a) Coordenadas triangulares para diferenças finitas
- b) Elementos conformes (para as placas) e elementos híbridos (pa

ra as chapas) pelo método dos Elementos Finitos.

- c) Uma nova técnica de discretização numérica, no sentido de se evitar a existência de pontos fora do contorno, com a introdução de novos conceitos, isto é, uma melhor maneira no tratamento das condições de contorno.
- d) Sugerimos a utilização de processos melhorados de diferenças finitas, como os métodos plurilocais, sobretudo na análise de chapas multiplamente conexas.

APÊNDICE

a) Notações Utilizadas no Desenvolvimento Teórico.

n_x, n_y - ângulos formados pelo normal da seção considerada e os eixos 0_x e 0_y , respectivamente.

l, m - cosenos diretores

x, y, z - coordenadas retangulares

u, v, w - componentes do deslocamento paralelas aos eixos X, Y e Z respectivamente.

ϵ - alongamento ou deformação unitária

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - componentes normal de tensão paralelas aos eixos coordenados x, y e z respectivamente.

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ - componentes tangencial de tensão em coordenadas retangulares.

θ, α - ângulos que definem uma determinada direção

δ - espessura da chapa.

E - módulo de elasticidade longitudinal

- G - módulo de elasticidade transversal
- ν ou μ - coeficiente de Poisson
- ϵ_x, ϵ_y - projeções do alongamento unitário sobre os eixos X e Y respectivamente.
- γ_{xy} - componente da deformação tangencial no sistema retângular.
- M_n, M_t - momentos fletores por unidade de comprimento de uma seção da placa perpendicular aos eixos n e t respectivamente.
- M_x, M_y - momentos fletores por unidade de comprimento de uma seção da placa perpendicular aos eixos x e y respectivamente.
- Q_x, Q_y - esforço cortante paralelo ao eixo z por unidade de comprimento de uma seção da placa perpendicular aos eixos x e y respectivamente ou componentes das forças de contorno nas direções x e y respectivamente.
- M_{xy}, M_{yx} - momentos torsores por unidade de comprimento de uma seção da placa perpendicular aos eixos x e y respectivamente.

- V_x, V_y ou R_x, R_y - forças de bordo resultante, por unidade de comprimento de uma seção da placa perpendicular aos eixos x e y respectivamente.
- V_n, V_t - o mesmo que o anterior para os eixos n e t respectivamente.
- R - força resultante concentrada no canto de uma placa.
- $\nabla^2(\nabla^2) = \nabla^4$ - bi-laplaciano em coordenadas retangulares.
- D - rigidez a flexão da placa.
- q - carga uniformemente distribuída
- $P(x,y)$ - carga linearmente distribuída para um ponto genérico da placa.
- P_f - ordenada de carga para o carregamento linearmente distribuído no canto fixo de uma placa.
- P_o - carregamento parcial uniformemente distribuído ao longo dos bordos superior e inferior, por unidade de espessura de uma chapa.
- h - espessura da placa ou espaçamento de malha na direção x .

\vec{n} - direção da normal a uma seção da placa

\vec{t} - define uma direção normal a n .

$(\Delta_y^n)_i$ - diferença central de ordem n para um determinado ponto genérico i .

d - operador diferencial total.

∂ - operador diferencial parcial.

ϕ - função de tensões ou função de Ayri

p_x, p_y - componentes, por unidade de comprimento de forças aplicadas ao bordo, no sistema retângular.

A, B, C - constantes de contorno.

A^* - representa a energia elástica armazenada num corpo sujeito a um estado de tensão.

\oint - simbolisa uma integral curvilínea ou de contorno.

1b = libra

= pounds - unidade de força no sistema internacional.

polegada- unidade de comprimento no sistema internacional

- ψ - libra por polegada quadrada.
- I_z - momento de inercia de uma seção da placa com respeito ao eixo Z.
- a, b - dimensão dos bordos perpendiculares de uma placa.
- M_p - momento de todas as forças de contorno compreendidas entre a origem e um ponto "P" genérico do contorno, em relação a P, positivo no sentido anti-horário.
- a,b,c,... - nomenclatura utilizada para identificar pontos externos aos contornos ou pontos fictícios.

b) Convenções adotadas no desenvolvimento teórico.

----- - bordo livre.

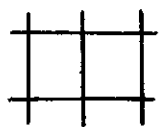
xxxxxxx - bordo engastado ou fixo.

===== - bordo simplesmente apoiado.



- sentido horário, convencionado negativo, para momentos " M_p " de contorno nas chapas.

----- - eixo de simetria.



- malha.

1, 2, 3... - numeração em algarismos arábicos, para pontos do domínio.

I, II, III... - numeração em algarismos romanos para pontos do contorno, numa chapa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BENNETI, Gilberto A., "Aplicação do método das Diferenças Finitas a um problema de elasticidade". Tese apresentada no COPPE/UFRJ em setembro de 1972.
2. FERRANTE, Agustin J.; G. DOS SANTOS, Maria Inês; CHAGAS, Filho, Eurico e GOMES FRANCO, José S.: "A linguagem Lorane Linear para análise estrutural por computador"; primeira edição, curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, U.F.R.G.S., Porto Alegre, setembro/1977.
3. HARRENTIEN, H.P. and ALMEYER, W.C.: "The Iowa State College Bulletin"; Bulletin 182 of the Iowa Engineering Experiment Station: Structural Behavior of a Plate Resembling a Constant Thickness Bridge Abutment Wingwall, Ames, Iowa, vol. LVII, January 14, 1959. nº33.
4. MASON, Jayme; Docente Livre do E.N.E.; da Christiane & Nielsen. A nuário da Faculdade de Engenharia - U.E.G.: "O Problema da co nexão múltipla nas chapas".
5. SALVADORI, M.G. and BARON, M.L.: "Numerical Methods in Engineering" 2nd ed., Prentice-Hall.
6. SANTOS, Sidney M.G.: "Curso seriado sobre teoria das placas, publicado na revista Estrutura - volumes diversos.
7. SERÁPHICO, Francisco F.N. "Estudo comparativo de análise numérica aplicada a placas esconsas". Tese apresentada na COPPE/UFRJ em setembro de 1972.
8. TIMOSHENKO, S. and WOINOWSKY, Krieger: "Theory of plates and shells", McGraw-Hill, 2nd ed. 1959.

9. TIMOSHENKO, S. and GOODIER, J.N.: "Theory of elasticity" 2nd ed.
McGraw-Hill, 1951.
10. WANG, P.C.: "Numerical an matrix methods in structural mechanics",
John Wiley & Sons, Inc., U.S.A., 1966.